Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s1journaldemat10liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

TOME X. — ANNÉE 1845.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1845

QA
1
J684
t.10

20766 c.

TABLE DES MATIÈRES,

TOME X.

Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres, par M. *Poinsot* 1

Nouvelles remarques sur les courbes du troisième ordre; par M. *A. Cayley*, de Cambridge. 102

Mémoire sur les diverses propriétés des surfaces du deuxième ordre déduites de la théorie des focales; par M. *B. Amiot*. 109

Demonstration d'un théoreme d'analyse; par M. *William Thomson*. 157

Méthode géométrique pour les rayons de courbure d'une certaine classe de courbes; par M. *Abel Transon*. 158

Note à l'occasion du Memoire precedent; par M. *Chasles*. 156

Sur quelques intégrales multiples; par M. *A. Cayley*. 158

Sur les deux formes $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$; par M. *J. Liouville*. 169

Équations numériques. Recherche des facteurs commensurables du second degré; par M. *Finck*. 171

Application de la théorie des transcendantes elliptiques à la rectification d'une classe étendue de courbes planes; par M. *William Roberts*. 177

Note sur la transformation et l'intégration d'une classe d'équations différentielles simultanées à plusieurs variables; par M. *E. Brassinne*. 194

Construction des rayons de courbure des courbes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan; par M. *Chasles*. 204

Note sur les lois élémentaires de l'électricité statique; par M. *William Thomson*. 209

Sur diverses questions d'analyse et de physique mathématique; par M. *J. Liouville*. . . . . [illegible]

Sur les fonctions de Laplace, qui résultent du développement de l'expression $\{a^2 - 2aa'\{\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\theta - \theta') + a'^2\}^{\frac{1}{2}}$, par M. *Jacobi*. [illegible]

Sur les exponentielles successives d'Euler et les logarithmes des différents ordres des nombres; par M. *J.-H. Grillet*. . . . . [illegible]

Addition à la Note sur quelques intégrales multiples, insérée dans le cahier d'avril; par M. *A. Cayley*. . . . . [illegible]

Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables; par M. *A. Cayley*. . . . . [illegible]

Pages.

Note sur deux systèmes généraux de trajectoires orthogonales; par M. *Michael Roberts* 251
Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultra-elliptiques; par M. *J.-A. Serret*. 257
Addition au Mémoire précédent; par M. *J.-A. Serret*. 286
Rapport sur ce Mémoire; par M. *J. Liouville*. 290
Note de M. *J. Liouville*. 293
Mémoire sur quelques propriétés géométriques relatives aux fonctions elliptiques; par M. *William Roberts*. 297
Note sur l'intégration de l'équation différentielle $(A + A'x + A''y)\,xdy - ydx - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0$; par M. *Lebesgue*. 316
Note sur les principes de la Mécanique; par M. *Abel Transon*. 320
Sur une propriété générale d'une classe de fonctions; par M. *J. Liouville*. 327
Note relative à l'instabilité de l'équilibre d'un système de points matériels; par M. *Jules Haelle*. 329
Sur le principe du dernier multiplicateur et sur son usage comme nouveau principe général de mécanique; par M. *Jacobi*. 337
Mémoire de Géométrie (deuxième partie); par M. *Auguste Miquel*. 347
Développements sur une classe d'équations relatives à la représentation géométrique des fonctions elliptiques; par M. *J.-A. Serret*. 351
Extrait d'une Lettre de M. *William Thomson* à M. Liouville. 364
Théorie des points singuliers dans les courbes planes algébriques; par M. *C. Briot*. 368
Note sur la formule de Taylor; par M. *Caqué*. 379
Démonstration d'un théorème de M. Chasles; par M. *A. Cayley*. 383
Mémoire sur les fonctions doublement périodiques; par M. *A. Cayley*. 385
Note sur les courbes elliptiques de la première espèce; par M. *J.-A. Serret*. . . . 421
Théorie géométrique des centres multiples; par M. *Philippe Breton*. 430
Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de la géométrie élémentaire : « Trouver la relation entre la distance des centres et les rayons de deux cercles dont l'un est circonscrit à un polygone irrégulier et dont l'autre est inscrit à ce même polygone »; par M. *C.-G.-J. Jacobi*. 435
Remarques sur les transcendantes elliptiques et abéliennes; par M. *Eisenstein*. . . 445
Extrait d'une Lettre de M. *William Roberts* à M. Liouville. 451
Note sur une intégrale définie; par M. *William Roberts*. 453
Sur un Mémoire de M. Serret, relatif à la représentation des fonctions elliptiques; par *J. Liouville*. 456
Théorèmes de Géométrie; par M. *Michael Roberts*. 466

ERRATA.

Pages.	Lignes.	
165.	16.	à la fin, remplacez le point par une virgule.
165.	17.	*au lieu de* Si, *lisez* si.
165.	19.	*au lieu de* somme qui, *lisez* et la somme.
232.	4	en remontant, *au lieu de* $\frac{dP_n}{dp^2}\frac{dX_n}{dx^2}$, *lisez* $\frac{dP_n}{dp}\frac{dX_n}{dx}$.
232.	3	en remontant, *au lieu de* $\frac{d^3P_n}{dp}\frac{d^3X}{dx}$, *lisez* $\frac{d^3P_n}{dp}\frac{d^3X_n}{dx}$.
366 et 367.		partout où il y a s, *lisez* n.
439.	7	en remontant, *au lieu de* AP, *lisez* GP.
439.	3	en remontant, *au lieu de* $-r^2$, *lisez* $-r^3$.
443.	4.	*au lieu de* n sommets, *lisez* m sommets.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RÉFLEXIONS
SUR
LES PRINCIPES FONDAMENTAUX
DE LA THÉORIE DES NOMBRES.

PAR M. POINSOT.

I.

Je me propose de parcourir et de démontrer dans cet écrit les principales propositions qui servent de base à la théorie des nombres. Quoique les géomètres en aient déjà donné des démonstrations plus ou moins ingénieuses, je ne crois pas inutile d'en présenter encore de nouvelles, qui me paraissent à la fois plus simples et plus directes, ou qui, étant tirées d'un nouvel ordre de considérations, sont propres à mettre la doctrine dans un nouveau jour [*].

[*] J'avais jeté sur le papier ces réflexions et ces démonstrations relatives à la théorie des nombres, dans la seule intention d'éclaircir, pour quelques personnes, les premiers principes de cette importante théorie. On m'a persuadé qu'il pouvait être utile de les publier; mais je prie le lecteur de les recevoir avec indulgence, parce que je les donne ici telles qu'elles se sont présentées dans le cours de cette espèce de conversation mathématique.

Ces démonstrations pourraient entrer facilement dans nos ouvrages élémentaires, et par là contribuer, bien plus qu'on ne l'imagine, aux véritables progrès de la science. Car si la théorie des nombres est encore peu avancée, malgré les efforts des plus grands géomètres, ce n'est point uniquement à la difficulté propre de la matière qu'on doit attribuer la lenteur de ces progrès : elle tient peut-être encore plus à cette espèce d'isolement et d'abandon où l'on a laissé jusqu'ici cette première partie de nos études mathématiques. Il faut observer que la théorie des nombres est tout à fait négligée dans nos Éléments, et que l'esprit ne s'y exerçant pas d'assez bonne heure, n'est peut-être plus capable de s'en rendre ensuite les principes assez familiers. Les Anciens y donnaient plus de soin dans leurs ouvrages; on dirait qu'ils en avaient mieux senti l'importance, et leurs livres, à cet égard, ont encore de l'avantage sur les nôtres. Mais depuis longtemps il semble que les auteurs aient regardé la théorie des nombres comme une spéculation singulière, qui ne se lie à rien ni dans l'Analyse ni dans la Géométrie, et qui n'offre ainsi à l'esprit que des vérités plus curieuses qu'utiles. A peine en trouve-t-on quelques traces dans les Traités ordinaires d'Arithmétique et d'Algèbre. Et cependant, pour peu qu'on y veuille réfléchir, il est aisé de voir que cette arithmétique transcendante est comme le principe et la source de l'algèbre proprement dite. C'est une vérité qu'on pourrait établir par le raisonnement, comme je le montrerai tout à l'heure, mais qu'on peut aussi prouver en quelque sorte par l'expérience. Car, observez que ce peu qu'on ajoute de temps à autre à l'algèbre vient du peu qu'on découvre par intervalles dans la science des propriétés des nombres. On en a surtout un bel exemple dans cet heureux rapprochement qui a fait connaître à M. Gauss la résolution algébrique des équations binômes de tous les degrés, et la nature des nombres premiers par lesquels on peut diviser régulièrement le cercle au moyen de la règle et du compas. C'est un pas inattendu et bien remarquable, que la théorie des nombres a fait faire à la fois à l'algèbre et à la géométrie. L'algèbre, à son tour, par ses signes, et la géométrie même, par ses figures, peuvent s'appliquer aussi heureusement à la théorie des nombres, y faire éclore de nouvelles idées et de nouveaux théorèmes, indiquer de nouvelles routes dans la science, et nous apprendre enfin quelque chose sur l'art encore inconnu de nous y con-

duire. C'est ce que j'ai tâché de montrer d'une manière assez frappante, dans un Mémoire étendu où j'ai donné le premier essai de cette singulière application, et où l'on a vu les imaginaires mêmes servir à la représentation analytique de certains nombres dont la loi nous était entièrement inconnue [*].

Ces rapprochements et quelques autres semblables montrent assez la liaison de l'algèbre et de la théorie des nombres; mais, comme je l'ai dit plus haut, c'est ce qu'on peut voir aussi, indépendamment de ces exemples, et pour ainsi dire à priori, en s'élevant à l'idée qu'on doit se faire de la science mathématique considérée de la manière la plus générale. Cette réflexion mérite d'être développée.

II.

On définit ordinairement les mathématiques la science des *grandeurs* en général, ou la science des *quantités*, c'est-à-dire, au fond, la science des *rapports*; c'est la définition la plus générale qu'on ait donnée jusqu'ici du mot de *mathématiques*. Mais, quoique cette définition paraisse embrasser la science tout entière, il me semble qu'elle n'en donne encore une idée ni assez profonde ni assez étendue. Les mathématiques ne sont pas seulement la science des rapports, je veux dire que l'esprit n'y a pas uniquement en vue la *proportion* ou la *mesure*; il peut encore considérer le *nombre* en lui-même, l'*ordre* et la *situation* des choses, sans aucune idée de leurs rapports, ni des distances plus ou moins grandes qui les séparent. Si l'on parcourt les différentes parties des mathématiques, on y trouve partout ces deux objets de nos spéculations.

Ainsi l'Arithmétique nous offre d'abord l'arithmétique ordinaire, qui n'est guère autre chose que l'art de la numération, et qui peut s'établir d'une infinité de manières, selon l'échelle ou la base que l'on veut choisir. Mais les nombres, considérés en eux-mêmes, ont des propriétés qui ne dépendent point du tout de la manière dont on les représente, ou dont on opère actuellement sur eux. Ainsi il y a des nombres

[*] Voyez le volume XIV et dernier de la *Classe des Sciences mathématiques de l'Institut*, et le tome IV des *Mémoires de l'Académie des Sciences*.

qui ne peuvent être divisés par aucun autre, et qu'on nomme *premiers*, ou *simples*, parce que tous les autres s'en *composent* par la multiplication; il y a les différentes *puissances* des nombres, qu'on produit en les multipliant plusieurs fois par eux-mêmes; et une foule d'autres formés par diverses lois, et par toutes les combinaisons régulières de celles-là. Or tous ces nombres et leurs propriétés demeurent toujours les mêmes dans tous les systèmes possibles de numération; et de là résulte un certain genre de spéculations et de vérités mathématiques, qui constituent cette arithmétique transcendante qu'on nomme aujourd'hui la *théorie des nombres*.

Si vous considérez l'Algèbre, vous y voyez également deux parties très-distinctes. Et d'abord, l'algèbre ordinaire, qu'on peut très-bien nommer l'*arithmétique universelle*. Cette algèbre, en effet, n'est autre chose qu'une arithmétique généralisée, c'est-à-dire étendue des nombres particuliers à des nombres quelconques, et, par conséquent, des opérations actuelles qu'on exécutait à des opérations qu'on ne fait plus qu'indiquer par des signes; de manière que, dans cette première spéculation de l'esprit, on songe moins à obtenir le résultat de ces opérations successives qu'à en tracer le tableau, et à découvrir ainsi des formules générales pour la solution de tous les problèmes du même genre.

Mais il y a une algèbre supérieure, qui repose tout entière sur la théorie de l'ordre et des combinaisons, qui s'occupe de la nature et de la composition des formules considérées en elles-mêmes, comme de purs symboles, et sans aucune idée de valeur ou de quantité. C'est à cette partie qu'on doit rapporter la théorie profonde des équations, celle des expressions imaginaires, et tout l'art des transformations algébriques; et c'est même cette seule partie élevée de la science qui mérite, à proprement parler, le nom d'*algèbre*.

Si l'on passe maintenant à la Géométrie, qu'on définit la science de l'*étendue figurée*, on y voit d'abord la géométrie ordinaire, qui étudie les propriétés des figures sous le seul point de vue des rapports de grandeur, et qui n'a ainsi d'autre objet que la proportion ou la mesure. Mais on distingue ensuite une autre géométrie, qui ne regarde, pour ainsi dire, que les lieux dans l'espace, c'est-à-dire l'ordre et la situation des choses, sans aucune considération de leur grandeur ou de leur figure. C'est une science encore neuve, que Leibnitz paraît avoir le

premier entrevue, et qu'il a nommée la *géométrie de situation*. Il en avait pris l'idée dans la considération de quelques jeux remarquables, dont la loi ne dépend que de la situation des différentes pièces qu'on y emploie; mais elle s'étend à beaucoup d'autres questions importantes, et c'est à cette géométrie que j'ai cru devoir rapporter les *polygones* et les *polyèdres étoilés*, et plusieurs problèmes d'ordre et de situation que j'ai proposés et résolus pour la première fois dans un Mémoire qui a été imprimé dans le *Recueil de l'Institut* et dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

La Mécanique elle-même nous présenterait également deux espèces de mécanique. Et d'abord celle qui calcule la quantité des mouvements, les forces, les vitesses; ensuite celle qui n'a en vue que la disposition des corps, leur jeu réciproque, la manière dont ils croisent leurs routes, et cela sans avoir égard ni à la direction de ces lignes, ni au temps que les corps mettent à les décrire, ni aux forces qui sont nécessaires pour les mouvoir. Telles sont plusieurs machines ou mécaniques ingénieuses, où l'on ne considère ni la force ni la grandeur du mouvement, mais uniquement la situation et le mouvement géométrique des différentes pièces qui les composent. Mais il est clair que cette espèce de mécanique serait toute fondée sur la géométrie de situation, et se confondrait, pour ainsi dire, avec elle.

Quoi qu'il en soit, vous voyez que les mathématiques nous offrent partout ces deux objets de spéculation : d'un côté, la *grandeur* ou la *quantité*, c'est-à-dire la *proportion* ou la *mesure* des grandeurs; de l'autre, le *nombre*, l'*ordre* et la *situation* des choses, sans aucune idée de mesure ou de quantité. De sorte que les mathématiques, considérées de la manière la plus générale, pourraient être définies la science qui a pour objet le *nombre*, l'*ordre* et la *mesure*.

Je mets la théorie des nombres en premier lieu, parce qu'elle est nécessairement la première qui doive s'offrir dans la chaîne naturelle de nos idées, et que la science des rapports y a elle-même ses premiers principes. Et, en effet, il n'est guère de problème mathématique, quelque simple qu'il soit, qui ne présente *plusieurs* choses à considérer, et qui n'ait ainsi de premières difficultés relatives au *nombre* de ces choses; de sorte que les premiers principes de la solution doivent être nécessairement puisés dans la théorie des nombres.

Cependant cette spéculation, que je mets la première dans la suite de nos idées, paraît ne s'être présentée que la seconde; et même on a vu les diverses branches des mathématiques s'élever à une assez grande hauteur, sans rien emprunter à la théorie des nombres, qui est restée, pour ainsi dire, isolée, et comme sans usage dans l'analyse et la géométrie. Mais il y a là-dessus une remarque essentielle à faire.

Il faut observer que la plupart des questions traitées jusqu'ici par les géomètres ont exigé, si j'ose le dire, encore plus d'adresse et de sagacité que de force et de profondeur. N'ayant presque jamais en vue que la *quantité*, ils ont pu la saisir, et même la suivre jusque dans les affections des grandeurs qui varient par nuances insensibles. Dans les premiers problèmes qui nous intéressent, il y a si peu d'éléments à considérer, que les difficultés qui tiennent au nombre et à l'ordre de ces éléments disparaissent pour ainsi dire d'elles-mêmes, et ne peuvent guère retarder la solution qu'on se propose d'obtenir. Mais sitôt qu'on a voulu résoudre des questions un peu moins simples, ces difficultés se sont fait sentir, et nous ont paru insurmontables. Dans ces sortes de recherches, on a à peine effleuré la matière; et les solutions particulières, qu'on avait obtenues dans quelques cas simples, n'étant pas tirées des principes généraux, n'ont pu donner aucune lumière sur les questions du même genre. C'est ce qu'on peut voir et rendre sensible par plusieurs exemples, et, entre autres, par cet exemple remarquable que j'ai cité plus haut. Ainsi les Anciens ont trouvé qu'on pouvait construire, par la règle et le compas, le côté du *triangle* équilatéral, et même le côté du *pentagone* régulier, inscrits à un cercle donné; et, quoiqu'ils aient trouvé dans ces deux cas des constructions exactes, ils n'ont rien vu au delà, et ils ont même cru qu'on ne pouvait aller plus loin. Ils ont pu résoudre le problème pour ces deux nombres premiers 3 et 5, parce que la difficulté qui vient des nombres est ici presque nulle, et n'est pas même aperçue. Mais il n'en est pas de même pour les nombres premiers supérieurs, et ils ont été arrêtés tout à coup dans leur recherche, parce que les vrais principes de la solution, qui ne peuvent être pris que dans la théorie des nombres, leur ont entièrement échappé. Et, en effet, s'ils avaient eu ces principes, ils auraient vu que la possibilité de diviser géométriquement le cercle en 3 ou 5 parties égales tient essentiellement à une propriété qui est commune

à ces deux nombres premiers, et qui consiste en ce que chacun d'eux, étant diminué de l'unité, fait une puissance exacte de 2; et de là ils auraient conclu que la solution est également possible pour les autres nombres premiers, tels que 17, 257, etc., qui jouissent aussi de la même propriété; mais c'est ce que leur solution, trouvée dans le cas de 3 et 5, ne leur avait pas même fait soupçonner, parce que ce n'était, pour ainsi dire, qu'une solution de fait, et qui ne venait pas de cette propriété des nombres, qui seule la fait réussir.

Il résulte donc de ces réflexions que la théorie des nombres, qui, au premier coup d'œil, ne paraît qu'une spéculation singulière en mathématiques, s'y présente au contraire d'une manière naturelle, et qu'elle forme même la première partie essentielle de la doctrine, comme étant celle où la science générale des rapports a elle-même ses premiers fondements. C'est par cette théorie de l'ordre et des nombres qu'on peut connaître la nature propre de l'algèbre, et rendre raison de cette *équivoque*, ou multiplicité de sens, qu'elle attache à ses signes, et qui nous présente souvent plusieurs racines ou solutions différentes dans un problème où notre esprit n'en voit qu'une seule: propriété singulière de l'algèbre, dont on ne s'est point encore bien rendu compte, et que je vais tâcher d'approfondir afin de jeter un nouveau jour sur la philosophie de la science.

III.

Quand on applique l'algèbre à la solution d'un problème, on trouve souvent une équation de degré supérieur, qui a plusieurs racines, et qui donne ainsi, outre la valeur propre à résoudre le problème tel que l'esprit le considère, d'autres valeurs auxquelles on n'avait pas songé, et qu'il paraît quelquefois impossible d'interpréter par les nombres ou par les lignes dont il s'agit dans la question proposée.

D'Alembert a fait là-dessus des réflexions dans plusieurs de ses écrits, et notamment dans le dictionnaire de l'Encyclopédie, au mot *Équation*. Il parcourt quelques questions très-simples, où l'algèbre donne à la fois plusieurs solutions différentes, quoique le problème paraisse n'en avoir qu'une seule dans le sens précis de son énoncé; et il tâche d'expliquer cette multiplicité, en faisant voir que l'équation est souvent

plus générale que l'énoncé, et qu'elle est la traduction algébrique de plusieurs énoncés différents dont l'algebre ne peut exprimer la différence. « Quelques algébristes, dit-il, regardent cette généralité comme » une richesse de l'algèbre, qui répond, non-seulement à ce qu'on » lui demande, mais encore à ce qu'on ne lui demandait pas et qu'on » ne songeait pas à lui demander.... Pour moi, ajoute d'Alembert, je » ne puis m'empêcher d'avouer que cette richesse prétendue me pa- » raît un inconvénient. Souvent il en résulte qu'une équation monte » à un degré beaucoup plus haut qu'elle ne monterait, si elle ne ren- » fermait que les racines propres à la vraie solution de la question telle » qu'elle est proposée. Il est vrai que cet inconvénient serait moindre, » et serait même, en un sens, une véritable richesse, si l'on avait une » méthode générale pour résoudre les équations de tous les degrés. Il » ne s'agirait plus que de démêler parmi les racines celles dont on » aurait vraiment besoin ; mais malheureusement on se trouve arrêté » dès le quatrième degré. Il serait donc à souhaiter, puisqu'on ne peut » résoudre toute équation, qu'on pût au moins l'abaisser au degré de » la question, c'est-à-dire à n'avoir qu'autant d'unités dans l'exposant » de son degré, que la question a de solutions vraies et directes; mais » la nature de l'algèbre ne paraît pas le permettre. »

Telles sont à ce sujet les réflexions de d'Alembert, philosophe à qui l'on doit sans doute beaucoup de lumières sur d'autres points de la science; mais il me semble qu'ici ses réflexions manquent à la fois de force et de justesse, et qu'elles ne vont point au fond de la question philosophique dont il s'agit. Cette généralité de l'algèbre n'est ni une *richesse* ni un *inconvénient :* c'est le simple caractère d'une science exacte et parfaite; car l'algèbre ne nous donne exactement que ce qu'un raisonnement parfait nous aurait donné lui-même.

Supposons, en effet, que le problème dont on s'occupe soit énoncé d'une manière parfaite : l'énoncé ne renfermera que la relation précise qui existe entre l'inconnue et les données du problème, et qui seule forme entre elles une *équation.* Il est clair que tout ce qu'on pourrait ajouter à cet énoncé, ou y sous-entendre, serait au moins inutile, et quelquefois même pourrait être une contradiction. Car, puisque l'inconnue se trouve déjà *fixée* par cette seule partie de l'énoncé qui forme l'équation, il est évident qu'on n'est plus le maître

de rien ajouter; comme, par exemple, cette condition que l'inconnue sera plus grande ou plus petite qu'une certaine quantité, ou que la ligne cherchée tombera dans telle ou telle partie de la figure, etc.; conditions qui ne dépendent plus de nous, que l'esprit peut supposer mal à propos, et qui souvent n'ont pas lieu dans la question proposée. On voit donc que si l'énoncé du problème est parfait, il n'est rien autre chose que l'équation même qui le traduit en algèbre. Si donc cette équation nous présente plusieurs racines ou valeurs différentes de l'inconnue, l'énoncé lui-même doit également présenter, à l'esprit attentif, cette même multiplicité de solutions dans le problème dont il s'agit.

L'algèbre ne donne donc rien au delà de ce qu'on lui demande; elle n'est pas plus générale que la logique considérée dans sa perfection, et le degré où l'équation s'élève est le degré même de la question, si elle parfaitement posée.

Mais le plus souvent nos énoncés sont très-imparfaits; je veux dire, qu'indépendamment de cette relation qui lie aux données l'inconnue et qui la *détermine,* notre esprit y mêle encore certaines conditions inutiles et souvent contradictoires; et voici alors ce qui nous arrive. Comme ces sortes de restrictions ne donnent point d'équation, et ne sont pas ainsi de nature à s'écrire en algèbre, l'équation qu'on tire de l'énoncé se trouve exactement la même que si ces suppositions n'avaient point lieu, et, par conséquent, cette équation a les mêmes racines ou solutions différentes dont le problème est susceptible en le supposant bien exprimé. Cependant, comme notre esprit reste toujours préoccupé par la considération particulière de ces limites où il borne la question, il s'étonne d'abord de cette multiplicité de solutions qu'il n'avait point en vue, et il cherche ensuite à les interpréter par les lignes, ou par les quantités dont il s'agit dans la question proposée. S'il en vient à bout, il attribue à l'algèbre, qui lui a donné ces solutions inattendues, une généralité propre qu'il n'avait pas trouvée dans le raisonnement ordinaire; s'il ne peut expliquer toutes ces valeurs, il reproche à l'algèbre cette trop grande généralité, comme un inconvénient, et une imperfection qui mêle la vraie valeur de l'inconnue à des valeurs étrangères. Mais on voit qu'il n'y a ici d'autre imperfection que celle de l'esprit et du langage. L'algèbre, encore une fois, ne

traduit et ne doit traduire, de l'énoncé du problème, que la seule partie qui fait une *équation*, et qui suffit pour *déterminer* l'inconnue. Elle abandonne tout le reste, comme ces rapports vagues de *majorité* ou de *minorité*, qui ne peuvent servir à aucune *détermination*. Ainsi l'équation obtenue ne renferme rien des imperfections de notre énoncé, et elle devient la question même parfaitement posée. La multiplicité de ses racines nous avertit donc, non pas, comme on le croit d'ordinaire, qu'il faut *étendre* le premier énoncé pour en multiplier les *divers sens*; mais qu'il faut, au contraire, le simplifier et le *réduire*, en y supprimant ce qu'on y avait mis de trop et qu'on n'était pas le maître d'y insérer. Et alors on peut voir qu'il n'y a précisément, dans l'équation algébrique, que la même multiplicité de solutions qu'on aurait pu reconnaître, sans algèbre, dans l'énoncé parfait du problème.

Telle est, je crois, la vraie nature de l'algèbre, et la vraie solution de la question philosophique que j'examine, et qui touche aux premiers fondements de la science mathématique. Il ne s'agit pas de savoir s'il y a, ou non, une méthode générale pour résoudre les équations de tous les degrés : on n'en sait pas moins qu'une équation de degré supérieur a plusieurs racines, et la question était d'expliquer cette multiplicité, en montrant qu'elle est dans la nature même des choses, et que l'algèbre n'a pas plus de généralité qu'un bon raisonnement.

Mais il ne faut pas manquer de faire ici une observation essentielle : c'est que, à raison de l'ignorance et de la faiblesse de l'esprit humain, qui ne marche guère qu'à l'aide des images sensibles, ou des mots qui eux-mêmes ne répondent presque tous qu'à des images, l'algèbre nous a été et nous est encore d'un merveilleux secours. Car, comme elle n'exprime que les rapports qui *déterminent*, et qu'elle n'a point de signes pour les conditions vagues, il en résulte que, quelque imparfaits que soient nos énoncés, pourvu qu'ils renferment la loi de rapport qui fait le nœud du problème, l'équation que l'analyse en tire se trouve aussi parfaite que si elle provenait de l'énoncé le plus parfait ; et, sous ce point de vue, on peut dire que l'algèbre a étendu et perfectionné l'esprit humain.

On voit donc que ce qui nous resterait à faire aujourd'hui pour l'achèvement de la doctrine, ce serait de chercher et de montrer dans chaque problème comment l'esprit, à l'aide du seul raisonnement, au-

rait pu s'élever à cette généralité de vue dont il n'a été averti que par les signes de l'algèbre, et comment il aurait dû prévoir ces multiples solutions qui coexistent dans un même problème, et qu'aucun art ne peut séparer. C'est par cette étude attentive qu'il verra ce qui avait manqué jusqu'ici aux principes de son analyse logique. Il n'avait songé qu'aux rapports de grandeur, et il reconnaîtra qu'il fallait avant tout considérer le nombre et l'ordre des choses, indépendamment de toute idée de grandeur ou de quantité. Dans cette pure considération de l'ordre, où il verra que plusieurs ordres, qui lui paraissent différents, naissent pourtant l'un de l'autre par une seule et même loi, et se reproduisent sans cesse, quel que soit le premier ordre d'où l'on veuille partir, il trouvera l'origine naturelle des *puissances*, et la raison profonde de ces *multiples racines* de l'unité, qui ne sont point des *valeurs*, mais de simples *signes d'ordre* entre les choses que l'on considère. Par ces nouveaux principes il perfectionnera l'algèbre elle-même, et l'algèbre à son tour pourra jeter de nouvelles lumières sur la théorie des nombres.

De toutes ces réflexions, et d'une foule d'autres que je pourrais y ajouter, je conclus donc que les principes de l'algèbre et de la théorie des nombres devraient être unis ensemble dans nos ouvrages élémentaires, comme ils sont inséparables par la nature même de ces deux sciences. Ainsi j'espère qu'on me pardonnera, et même qu'on me saura quelque gré de revenir sur ces principes fondamentaux, d'essayer de les rendre plus clairs et plus sensibles, et de faciliter ainsi aux jeunes géomètres une étude très-ardue, et en apparence très-stérile, mais en effet très-féconde, et peut-être, comme je l'ai dit, la seule d'où l'analyse mathématique puisse attendre aujourd'hui de véritables découvertes.

CHAPITRE Ier.

De quelques propositions fondamentales de la théorie des nombres.

Je commencerai par établir le théorème général qui regarde le nombre des racines ou solutions entières d'une équation indéterminée de degré quelconque. Ce théorème est tout à fait analogue à celui qui sert de base en algèbre à la théorie générale des équations, et je vais

les démontrer tous deux de la même manière. J'examinerai ensuite les autres théorèmes à mesure qu'ils se présenteront dans le cours naturel de ces réflexions.

Article Ier.

Sur le nombre des entiers qui peuvent rendre un polynôme divisible exactement par un nombre premier.

1. Considérez un polynôme rationnel et entier du degré m, de la forme

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \cdots + Sx + T,$$

et que, pour abréger, je désignerai par X. Prenez m quantités quelconques $a, b, c, \ldots, s, t$, et divisez le polynôme X par le binôme $x - a$, jusqu'à ce que le reste ne contienne plus la lettre x, ce qui est toujours possible; vous aurez l'équation

$$X = (x - a)X' + X_a,$$

le quotient X′ étant un polynôme du degré $m - 1$ en x, et le reste X_a étant le polynôme proposé X où l'on aurait changé x en a.

Divisez de même X′ par $x - b$ et vous aurez de la même manière un quotient X″ du degré $m - 2$, et un reste X'_b qui sera le polynôme X′ où l'on aurait changé x en b; et par conséquent vous aurez

$$X' = (x - b)X'' + X'_b.$$

Continuez de même de diviser X″ par $x - c$, et ainsi de suite jusqu'au dernier polynôme X^{m-1} qui ne sera plus que du premier degré en x, et que vous diviserez par $x - t$; et vous trouverez enfin

$$X^{m-1} = (x - t) + X^{m-1}.$$

Substituez maintenant dans la première équation, à la place de X′, sa valeur donnée par la seconde, et dans l'équation résultante, à la place de X″, sa valeur donnée par la troisième, et ainsi de suite; et vous aurez l'équation

$$X = X_a + (x - a)X'_b + (x - a)(x - b)X''_c + (x - a)(x - b)(x - c)X'''_d + \cdots$$
$$+ (x - a)(x - b)(x - c)\cdots(x - s)(x - t);$$

équation *identique*, c'est-à-dire, qui *aura lieu quelles que soient les quantités que vous vouliez prendre pour* a, b, c,..., s, t.

2. Or actuellement supposons que la quantité désignée par a soit telle qu'étant mise au lieu de x dans le polynôme proposé, elle réduise ce polynôme X à zéro; alors le terme marqué par X_a sera nul de lui-même, et l'équation précédente se réduira à celle-ci :

$$X = (x-a)X' + (x-a)(x-b)X'' + (x-a)(x-b)(x-c)X''' + \cdots$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-s)(x-t).$$

Supposons ensuite que b soit aussi une quantité capable de réduire X à zéro; on aurait donc $X_b = 0$; mais l'équation précédente, en faisant $x = b$, donnerait $X_b = (b-a)X'$; donc si b diffère de a, $X' = 0$ donne nécessairement $X'_b = 0$, et la transformée se réduit encore et devient ainsi

$$X = (x-a)(x-b)X'' + (x-a)(x-b)(x-c)X''' + \cdots$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-s)(x-t).$$

De même, si $x=c$ rend nul le polynôme X, on aura $X''' = 0$, et ainsi de suite; de sorte que *si* a, b, c,..., s, t *sont* m *quantités qui puissent réduire le polynôme* X *à zéro, ce polynôme peut être transformé identiquement dans le produit*

$$(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-s)(x-t),$$

ce qui est le fondement de toute la théorie des équations.

3. On voit par là qu'il n'y a pas plus de manières de réduire à zéro le polynôme X du degré m, qu'il n'y a de manières de réduire à zéro le produit de m facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$,..., $x-s$, $x-t$; or il est évident qu'un produit ne peut jamais devenir nul à moins que quelqu'un de ses facteurs ne soit nul en particulier; de plus, chaque facteur $x-a$ ne peut devenir nul que d'une seule manière, savoir, en faisant $x = a$; *donc un polynôme* X *du degré* m *ne peut devenir nul pour plus de* m *valeurs de* x, *c'est-à-dire que l'équation* $X = 0$ *ne peut avoir plus de racines qu'il n'y a d'unités dans le degré de cette équation.*

4. Soit maintenant p un nombre premier quelconque, et considé-

rons les nombres entiers x inférieurs à p, qui peuvent rendre le polynôme X divisible par p : ces nombres entiers seront les solutions ou *racines* de l'équation indéterminée $X = \mathfrak{M}p$, en désignant par $\mathfrak{M}p$ un multiple quelconque de p ; et je dis que cette équation ne peut avoir plus de racines qu'il n'y a d'unités dans le degré m de cette proposée.

En effet, si nous reprenons l'équation identique

$$X = X_a + (x-a)X_a' + (x-a)(x-b)X'' + (x-a)(x-b)(x-c)X''' + \cdots$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-s)(x-t),$$

nous voyons qu'en supposant a un nombre inférieur à p, qui rende X divisible par p, de manière qu'on ait $X_a = \mathfrak{M}p$, le polynôme X devient, à ce multiple près de p,

$$X = (x-a)X' + (x-a)(x-b)X'' + (x-a)(x-b)(x-c)X''' + \cdots$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-s)(x-t).$$

De même, si $x = b$ rend X divisible par p, de manière qu'on ait $X_b = \mathfrak{M}p$, comme l'équation précédente donne $X_b = (b-a)X_b'$, il en résulte qu'on aurait $(b-a)X_b' = \mathfrak{M}p$; mais b et a étant des nombres différents inférieurs à p, il est clair que le facteur $b-a$ ne peut être divisible par p; donc l'autre facteur X_b' doit l'être; donc $X_b = \mathfrak{M}p$ donne nécessairement $X_b' = \mathfrak{M}p$, et le polynôme X, à un multiple près du nombre p, se réduit à

$$X = (x-a)(x-b)X'' + (x-a)(x-b)(x-c)X''' + \cdots$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-s)(x-t).$$

De même, si le nombre $x = c$ rend X divisible par p, on en conclura $X_c'' = \mathfrak{M}p$, et ainsi de suite; de sorte que *si $a, b, c, \ldots, s, t$ sont m nombres entiers inférieurs à p qui rendent X divisible par p, ce polynôme X du degré m sera, à des multiples près du nombre p, équivalent au produit des m facteurs binômes $x-a$, $x-b$, $x-c, \ldots, x-s$, $x-t$.* Ainsi il n'y aura pas plus de manières de rendre le polynôme divisible par p qu'il n'y en a pour le produit équivalent dont il s'agit.

Or, p étant un nombre premier, ce produit ne peut devenir divisible par p, qu'autant que l'un des facteurs le sera séparément; mais il est évident que chacun d'eux, tel que $x-a$, ne peut l'être que pour une

seule valeur de x inférieure à p, savoir, $x = a$; *donc l'équation indéterminée* $X = \mathfrak{M}p$, *du degré* m, *ne peut avoir plus de* m *racines ou solutions en nombres entiers inférieurs à* p.

Remarque I.

5. J'ai supposé tout de suite que le premier terme x^m de la proposée n'avait pour coefficient que l'unité, parce qu'il est aisé de voir qu'on peut toujours réduire à cette forme une équation quelconque

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + Sx + T = \mathfrak{M}p,$$

en ajoutant aux coefficients B, C,..., T, des multiples convenables de p, qui les rendent tous divisibles par le premier coefficient A que je suppose premier à p. Il est évident que ces multiples de p ajoutés aux coefficients ne peuvent changer en rien les racines de la proposée, mais ils rendent tout le premier membre divisible par A, et l'on a la transformée

$$x^m + A'x^{m-1} + B'x^{m-2} + \cdots + S'x + T' = \mathfrak{M}p,$$

qui a les mêmes racines et dont le premier terme n'a d'autre coefficient que l'unité.

Si A n'était pas premier à p, il serait donc de la forme μp et l'on pourrait alors supprimer le premier terme de l'équation, laquelle ne serait ainsi que du degré $m - 1$; et de même pour le coefficient suivant B, s'il n'était pas premier à p.

Si tous les coefficients A, B, C,..., S, T étaient divisibles par p, le polynôme proposé serait toujours divisible par p pour toutes les valeurs possibles de x, ou, pour mieux dire, il n'y aurait plus alors d'équation.

6. Quant à ce multiple convenable de p qu'il faut ajouter à un coefficient B, pour le rendre divisible par A, on le trouve facilement en posant l'équation du premier degré,

$$\frac{B + ip}{A} = \text{un entier} = e,$$

ou

$$eA = ip + B.$$

équation toujours possible si A est premier à p, et qui fera connaître les valeurs de i et de e par la méthode connue [*]. On opérerait de la même manière pour rendre tous les autres coefficients C, D,..., S, T divisibles par A. Ces transformations sont tout à fait analogues à celles qu'on emploie dans les équations algébriques pour faire disparaître les fractions et réduire le premier coefficient à l'unité.

Ainsi nous considérerons toujours les équations indéterminées sous cette forme très-simple, où le premier coefficient est 1, et tous les autres réduits à des entiers, comme nous l'avons supposé dans la démonstration du théorème fondamental que nous venons de présenter n° 4.

Remarque II.

7. Lagrange est, comme on sait, le premier qui ait proposé et démontré ce théorème, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1768. Euler, dans le tome XVIII des *Nouveaux Commentaires de Saint-Pétersbourg*, l'a démontré dans le cas de l'équation binôme, mais par une méthode qu'il est facile d'étendre à une équation quelconque. On le trouve encore dans les Recherches de Legendre sur l'analyse indéterminée, dans sa *Théorie des nombres*, et dans l'ouvrage de M. Gauss. Mais toutes ces démonstrations sont à peu près la même présentée de différentes manières : la nôtre nous paraît aussi claire et aussi simple qu'on puisse le désirer.

Remarque III.

8. Cette démonstration suppose essentiellement que le nombre ou *module* p auquel on rapporte l'équation soit un nombre premier. Car s'il s'agissait d'un module composé N, le produit des binômes $x - a$, $x - b$, $x - c$,... pourrait être encore divisible par N sans qu'aucun d'eux le fût séparément. Il suffirait que l'un de ces binômes fût divisible par un des facteurs de N, et un autre par l'autre facteur, et le produit serait encore divisible par N : d'où l'on voit que l'équation

[*] On donnera plus loin quelques méthodes nouvelles pour résoudre les équations indéterminées du premier degré.

$X = \mathfrak{M}N$ peut avoir, si N est un nombre composé, plus de racines qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de son degré. Il serait facile de compter le nombre de toutes les solutions possibles, par le nombre de toutes les manières possibles de décomposer le nombre N en différents facteurs premiers entre eux; mais nous y reviendrons, et nous ne considérerons ici que le cas d'un module absolument premier et que nous désignerons toujours par la même lettre p.

Remarque IV.

9. On peut remarquer encore que cette démonstration sur le nombre des racines entières de l'équation indéterminée $X = \mathfrak{M}p$, est tout à fait la même que la démonstration relative au nombre des racines des équations déterminées $X = 0$. On n'y suppose absolument que l'opération de la division algébrique, et ce théorème fondamental, démontré par Euclide, que si deux nombres sont premiers par rapport à un troisième, leur produit est aussi premier à ce troisième nombre. Il résulte donc des premiers principes du calcul qu'une équation indéterminée du degré m,

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = \mathfrak{M}p,$$

ne peut avoir plus de m racines ou solutions en nombres entiers inférieurs à p; car une fois qu'on lui en supposerait m, on prouverait tout de suite qu'elle est, aux multiples près de p, identique avec l'équation

$$(x - a)(x - b)(x - c)\cdots = \mathfrak{M}p,$$

laquelle ne peut avoir d'autres racines que a, b, c, etc. Par la même démonstration on voit encore qu'une équation $X = \mathfrak{M}p$, du degré m, peut avoir autant de racines qu'il y a d'unités dans l'exposant m de ce degré; car on peut sur-le-champ former une équation

$$x^m + Ax^{m-1} + \cdots = \mathfrak{M}p,$$

qui aurait m racines données a, b, c, etc.: il n'y aurait qu'à faire le produit $(x - a)(x - b)(x - c)\ldots$ et à l'égaler à un multiple quelconque de p. Ainsi il y a une infinité d'équations

$$x^m + Ax^{m-1} + \cdots = \mathfrak{M}p,$$

qui ont effectivement m racines, et il ne peut y en avoir aucune du degré m qui ait plus de m racines; mais voilà tout ce qui résulte de la démonstration précédente. Lorsqu'on propose une équation du degré m, on ne peut savoir en général si elle a ou non des solutions en nombres entiers. Il n'y a qu'un cas particulier, fort remarquable, où l'on connaisse toujours le nombre et les valeurs des racines par la forme même de l'équation proposée; c'est le cas de l'équation binôme $x^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}p$, laquelle a toujours pour racines les $p - 1$ nombres entiers $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, p - 1$, inférieurs à p : ce qui est, en d'autres termes, l'expression du fameux théorème de Fermat.

Corollaire.

10. Mais, de ce théorème, qui sera démontré plus loin, on peut tirer une conséquence générale sur le nombre des racines entières que peut admettre une équation quelconque

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = \mathfrak{M}p.$$

Car puisque, aux multiples près de p, le binôme $x^{p-1} - 1$ est identique avec le produit

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)\cdots(x - \overline{p - 1}),$$

il en résulte que, si la proposée

$$x^m + Ax^{m-1} + \cdots = \mathfrak{M}p$$

a m racines entières, e, e', e'', etc., inférieures à p, le premier membre $x^m + Ax^{m-1} + \ldots$ est nécessairement un diviseur du binôme $x^{p-1} - 1$; ou plus généralement, que si elle a un nombre θ de racines entières, le polynôme $x^m + Ax^{m-1} + \ldots$ aura nécessairement avec $x^{p-1} - 1$ un commun diviseur du degré θ, et la réciproque est manifeste. D'où je conclus qu'on pourra toujours reconnaître si une proposée

$$x^m + Ax^{m-1} + \cdots = \mathfrak{M}p$$

a des racines entières, et quel est le nombre de ces racines, en cherchant le plus grand commun diviseur du polynôme $x^m + Ax^{m-1} + \ldots$ et du binôme $x^{p-1} - 1$. Si ce commun diviseur existe, et qu'il soit du

degré θ, la proposée aura θ racines entières; s'il n'y a pas de commun diviseur, la proposée n'admettra aucune racine entière. On voit donc que toutes les équations

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots = \mathfrak{M}p,$$

qui admettent m racines, ne sont, aux multiples près de la base ou module p, que des diviseurs de l'équation binôme $x^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}p$; et qu'ainsi cette équation, qui semblait particulière, est au fond très-générale et renferme en quelque sorte toutes les autres; ce qui fait sentir d'abord toute l'importance du théorème de Fermat dans l'analyse indéterminée.

Article II.

Sur le théorème de Fermat.

11. Ce théorème a été démontré pour la première fois par Euler, et depuis par presque tous ceux qui se sont occupés des propriétés des nombres. J'en proposerai encore dans ce Mémoire deux démonstrations nouvelles extrêmement simples. Mais, auparavant, je suis bien aise d'indiquer celle que Lagrange en a donnée dans les *Mémoires de Berlin* pour l'année 1771, et qui paraît assez naturellement déduite des premiers principes du calcul.

12. Cet illustre auteur fait voir que, si l'on forme l'équation

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\cdots(x-p-1) = 0,$$

p étant un nombre premier, et qu'on représente le polynôme qui en résulte par

$$x^{p-1} + Ax^{p-2} + Bx^{p-3} + \cdots + T - 1 = 0,$$

tous les coefficients A, B, C, etc., T, seront divisibles par le nombre premier p.

Ainsi tous les coefficients peuvent être représentés par αp, ξp, γp, etc., τp; de sorte que l'équation qui a pour racines les nombres 1, 2, 3, 4, 5,..., $p-1$, est de cette forme

$$x^{p-1} + \alpha p x^{p-2} + \xi p x^{p-3} + \cdots + \tau p - 1 = 0$$

Or, par la théorie des équations, on sait que le dernier terme $\tau p - 1$ est égal au produit de toutes les racines $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, p - 1$; ainsi l'on a

$$1.2.3.4.5\ldots p - 1 = \tau p - 1,$$

ou

$$1.2.3.4.5\ldots p - 1 + 1 = \tau p,$$

et par conséquent *le produit de tous les nombres* $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, p - 1$, *augmenté de l'unité, est toujours divisible par* p, *quand* p *est un nombre premier :* ce qui donne d'abord le beau théorème qu'on attribue à Wilson, et que personne n'avait encore démontré.

Ensuite la même équation précédente, mise sous la forme

$$x^{p-1} - 1 = -\alpha x^{p-2} + \xi x^{p-3} + \text{etc.} + \tau p,$$

fait voir que le binôme $x^{p-1} - 1$ est toujours divisible par p, quelque valeur $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, p - 1$, qu'on veuille donner à x.

Donc l'équation indéterminée $x^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}p$ a toujours $p - 1$ racines ou solutions entières, qui sont $1, 2, 3, 4, 5$, etc., $p - 1$, ou, si l'on veut, $\mu p + 1$, $\mu p + 2$, $\mu p + 3$, $\mu p + 4$, etc., $\mu p + p - 1$: car, en négligeant les multiples de p, une puissance quelconque de $\mu p + e$ revient à la même puissance de e.

Ainsi *le binôme* $x^{p-1} - 1$, *où* p *est un nombre premier, est toujours divisible par* p, *en prenant pour* x *un nombre quelconque premier à* p.

C'est le fameux théorème de Fermat.

13. On déduirait encore de cette même équation,

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)\ldots(x - p - 1) = x^{p-1} + \alpha p x^{p-2} + \cdots + \tau p - 1,$$

que la somme de tous les nombres

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, p - 1,$$

la somme de leurs produits deux à deux, la somme de leurs produits trois à trois, etc., sont divisibles par p, lorsque p est un nombre premier.

Ainsi le théorème de Fermat, le théorème de Wilson et ceux qu'on vient d'ajouter, sont des corollaires d'une même équation qu'on démontre assez facilement par la méthode des coefficients indéterminés, et par la considération des coefficients du binôme ou des

termes p, $\frac{p.\overline{p-1}}{2}$, $\frac{p.\overline{p-1}.\overline{p-2}}{2.3}$, etc., qui, lorsque p est premier, sont tous entiers, et divisibles par p, à l'exception du dernier $\frac{p.\overline{p-1}.\overline{p-2}\ldots 1}{1.2.3\ldots p}$, qui est égal à l'unité.

Article III.

Théorème de Fermat généralisé.

14. Au reste, le théorème de Fermat peut être en quelque sorte généralisé, c'est-à-dire étendu à un nombre quelconque N, premier ou composé, et s'exprimer de la manière suivante :

Si *n marque combien il y a de nombres inférieurs et premiers à* N, *on a toujours* $x^n - 1$ *divisible par* N, *ou* $x^n - 1 = \mathfrak{M}\mathrm{N}$, *pourvu que* x *soit un nombre premier à* N.

Ce théorème a été démontré assez directement par Euler dans les *Nouveaux Commentaires de Saint-Pétersbourg* (années 1760 et 1761).

Si le nombre N est premier, alors il est clair que n est égal à $\mathrm{N} - 1$, et l'on peut prendre pour x tel nombre qu'on voudra qui ne soit pas un multiple de N ; et ce cas revient exactement au théorème de Fermat.

15. En général, l'équation $x^n - 1 = \mathfrak{M}\mathrm{N}$ a n racines entières qui sont les n nombres inférieurs et premiers à N; et il est aisé de voir qu'elle n'en peut avoir d'autres. Car soit, s'il est possible, une racine x qui aurait avec N un commun diviseur θ, de manière qu'on eût

$$x = \theta y \quad \text{et} \quad \mathrm{N} = \theta \mathrm{P};$$

on aurait donc, par hypothèse,

$$\theta^n . y^n - 1 = \mathfrak{M}\,\theta\mathrm{P},$$

d'où il résulterait

$$\theta^{n-1} . y^n - \frac{1}{\theta} = \mathfrak{M}\mathrm{P},$$

équation impossible, à moins que θ ne soit égal à l'unité, et que, par conséquent, x et N ne soient premiers entre eux. Ainsi l'équation $x^n - 1 = \mathfrak{M}\mathrm{N}$ ne peut être résolue que par les nombres premiers à N, et n'a que n racines en nombres entiers inférieurs à N. Quant aux

autres solutions en nombres supérieurs à N, nous ne les considérerons point, puisque, rabaissées au-dessous de N par la division, elles reviendraient aux premieres que nous désignerons généralement par

$$1, a, b, c. \text{ etc., } N - 1.$$

Remarque I.

16. Ce qu'on vient de dire est d'autant plus remarquable que si le binôme $x^n - 1$ est résoluble en facteurs rationnels de degrés inférieurs, quelques-uns de ces facteurs, étant séparément égalés à un multiple de N, peuvent avoir plus de solutions qu'il n'y a d'unités dans le plus haut exposant de l'inconnue x, ce qui ne peut jamais arriver quand N est un nombre premier.

Mais dans le cas de N nombre composé, si quelque facteur de $x^n - 1$ égalé à un multiple de N a plus de solutions qu'il n'y a d'unités dans l'exposant, les autres facteurs en auront nécessairement moins, puisque la proposée $x^n - 1 = \mathfrak{M}N$ ne peut avoir en tout plus de n racines.

17. Pour éclaircir la chose par un exemple, considérons le nombre $N = 15$, on aura

$$1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$$

pour les huit nombres inférieurs et premiers à 15; par conséquent $n = 8$, et l'on a l'équation

$$x^8 - 1 = \mathfrak{M}15;$$

mais le binôme $x^8 - 1$ se décompose de cette manière :

$$x^2 - 1 \,(x^2 + 1)(x^4 + 1);$$

or, pour le premier facteur $x^2 - 1$ qui n'est que du second degré, il y a quatre manières de le rendre divisible par 15, savoir, en faisant

$$x = 1, \quad \text{ou} \quad x = 14, \quad \text{ou} \quad x = 4, \quad \text{ou} \quad x = 11.$$

Le second facteur $x^2 + 1$ ne peut être rendu divisible par 15 d'aucune

manière, ni le troisième facteur $x^4 + 1$, de sorte que les équations

$$x^2 + 1 = \mathfrak{M}15 \quad \text{et} \quad x^4 + 1 = \mathfrak{M}15$$

ne peuvent avoir aucune solution; mais l'équation résultante du produit des deux premiers facteurs, savoir,

$$x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1 = \mathfrak{M}15,$$

a encore les quatre solutions

$$2,\ 7,\ 8,\ 13,$$

parce que chacun de ces nombres rend le premier facteur divisible par 3, le second par 5, et par conséquent le produit, divisible par 3.5 ou 15; ainsi l'équation $x^4 - 1 = \mathfrak{M}15$ a les mêmes huit solutions que l'équation $x^8 - 1 = \mathfrak{M}15$; et le facteur $x^4 + 1$, égalé à un multiple de 15, n'en a aucune.

Voici le résultat de la substitution des différents nombres premiers à 15, dans le produit des trois facteurs

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 - 1:$$

$$\begin{aligned}
x &= 1 \text{ donne } (0)(2)(3) = 0.15.\\
x &= 4 \text{ donne } (3.5)(17)(257) = \mathfrak{M}15.\\
x &= 11 \text{ donne } 3.5.2^3(2.61).2.7321 = \mathfrak{M}15,\\
x &= 14 \text{ donne } (3.5.13)(197)(41.937) = \mathfrak{M}15.
\end{aligned}$$

où l'on voit que ces quatre nombres x rendent le seul premier facteur $x^2 - 1$ divisible par 15.

Ensuite

$$\begin{aligned}
x &= 2 \text{ donne } (3)(5)(17) = \mathfrak{M}15.\\
x &= 7 \text{ donne } (3.2^4)(5^2.2)(2.1201) = \mathfrak{M}15.\\
x &= 8 \text{ donne } (3^2.7)(5.13)(17.241) = \mathfrak{M}15.\\
x &= 13 \text{ donne } (3.2^4.7)(5.2.17)(2.7^3.17) = \mathfrak{M}15.
\end{aligned}$$

où l'on voit que ces quatre nouveaux nombres x rendent le premier facteur $x^2 - 1$ divisible par 3, et en même temps le second $x^2 + 1$ divisible par 5; mais le troisième facteur $x^4 + 1$ n'est rendu divisible ni par 3 ni par 5, par aucun des huit nombres inférieurs et premiers

à 15, et par conséquent ne peut le devenir par aucun nombre possible; de sorte que l'équation $x^4 + 1 = \mathfrak{M}15$ n'a aucune solution en nombres entiers.

Remarque II.

18. Quand N est un nombre premier p, l'équation $x^n - 1 = \mathfrak{M}N$ devient $x^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}p$, et si l'on décompose le premier membre $x^{p-1} - 1$ en différents facteurs rationnels, chacun d'eux égalé à un multiple de p a toujours autant de racines qu'il y a d'unités dans le degré de ce facteur, et n'en a ni plus ni moins. Cela tient à ce que le nombre p étant premier, un produit ne peut jamais être divisible par p, à moins que quelqu'un des facteurs ne le soit séparément. Or un facteur $(x^\theta + \ )$, du binôme proposé, ne peut devenir divisible par p, pour plus de θ valeurs de x, comme on l'a démontré; d'un autre côté, il ne peut l'être pour moins de θ valeurs, car il faudrait alors, ce qui est impossible, que l'autre facteur, qui est du degré $p - 1 - \theta$, le fût pour plus de $p - 1 - \theta$ valeurs, afin qu'on retrouvât les $p - 1$ racines entières qui satisfont toujours à la proposée.

19. Ainsi *l'on a toujours, non-seulement l'équation* $x^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}p$ *qui a* $p - 1$ *racines entières, mais encore les équations* $x^\delta - 1 = \mathfrak{M}p$ *qui en ont précisément* δ, *quand* δ *est une aliquote de* $p - 1$: car, dans ce cas, il est clair que $x^\theta - 1$ est un diviseur rationnel de $x^{p-1} - 1$. Mais nous reviendrons avec détail sur la théorie de ces équations.

Auparavant, je veux montrer que le théorème de Wilson peut être aussi généralisé, ou étendu d'un nombre premier p à un nombre quelconque N, et démontré directement de la manière suivante.

Article IV.

Théorème de Wilson généralisé.

20. Soient $1, a, b, c, d$, etc., $N - 1$ les nombres inférieurs et premiers à un nombre quelconque N, il est clair que ces mêmes nombres pourront être mis sous la forme

$$\frac{1 + \mathfrak{M}N}{a}, \quad \frac{1 + \mathfrak{M}N}{b}, \quad \frac{1 + \mathfrak{M}N}{c}, \quad \text{etc.},$$

de manière qu'on aura

$$\frac{1+\mathfrak{M}N}{a} = \alpha, \quad \frac{1+\mathfrak{M}N}{b} = \beta, \quad \text{etc.}, \quad \frac{1+\mathfrak{M}N}{N-1} = N-1.$$

α, β, etc., étant les mêmes que a, b, etc., mais en général dans un autre ordre, excepté pour le dernier qui, dans tous les cas, donnera toujours

$$\frac{1+\mathfrak{M}N}{N-1} = N-1;$$

on aura donc toujours, quel que soit N,

$$\frac{1+\mathfrak{M}N}{a} \cdot \frac{1+\mathfrak{M}N}{b} \cdot \frac{1+\mathfrak{M}N}{c} \cdots \frac{1+\mathfrak{M}N}{N-1} = \alpha\beta\gamma \ldots N-1 = abc \ldots \overline{N-1},$$

d'où l'on tire (en multipliant les deux membres par $abc \ldots \overline{N-1}$, et réduisant le premier membre à la forme $1+\mathfrak{M}N$), l'équation

$$1+\mathfrak{M}N = (abc \ldots N-1)^2,$$

ou bien

$$(abc \ldots N-1)^2 - 1 = \mathfrak{M}N.$$

c'est-à-dire que *le carré du produit de tous les nombres inférieurs et premiers à un nombre quelconque* N, *étant diminué de l'unité, est toujours divisible par* N, théorème général qui s'étend à tous les nombres N, simples ou composés.

21. Mais il y a plus: l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$\{(abc \ldots \overline{N-1}) + 1\}\{(abc \ldots \overline{N-1}) - 1\} = \mathfrak{M}N,$$

et l'on peut démontrer que l'un ou l'autre des facteurs qui forment le premier membre est séparément divisible par N; et l'on peut distinguer ainsi tous les nombres N en deux classes qui appartiennent à l'un ou à l'autre de ces deux cas. Ceci mérite d'être examiné avec soin.

Je reprends les expressions précédentes,

$$\frac{1+\mathfrak{M}N}{a} = \alpha, \quad \frac{1+\mathfrak{M}N}{b} = \beta, \quad \text{etc.}, \quad \frac{1+\mathfrak{M}N}{N-1} = N-1;$$

et j'observe que si α était toujours différent de a; β différent de b, etc., de manière qu'on eût, par exemple,

$$\frac{1 + \mathfrak{M}\mathrm{N}}{a} = b,$$

et puis, en prenant un nouveau nombre c,

$$\frac{1 + \mathfrak{M}\mathrm{N}}{c} = d.$$

et ainsi des autres, il suffirait de considérer la moitié de ces expressions pour voir dans le produit tous les nombres différents a, b, c, etc., de sorte qu'on aurait

$$abcd \ldots = 1 + \mathfrak{M}\mathrm{N},$$

et multipliant de part et d'autre par $\mathrm{N} - 1$, il en résulterait

$$abcd \ldots \mathrm{N} - 1 = -1 + \mathfrak{M}\mathrm{N}.$$

Mais s'il arrivait qu'un des nombres α fût égal au nombre a, de manière qu'on eût

$$1 + \mathfrak{M}\mathrm{N} = a^2,$$

la conclusion précédente ne pourrait plus avoir lieu. Mais alors, au lieu de faire

$$\frac{1 + \mathfrak{M}\mathrm{N}}{a} = \alpha,$$

ce qui donnerait $\alpha = a$, on pourrait faire

$$\frac{-1 + \mathfrak{M}\mathrm{N}}{a} = \alpha,$$

et de cette manière, α serait différent de a, et égal à $\mathrm{N} - a$, comme cela est manifeste.

On peut donc toujours associer les nombres a, b, c, etc., deux à deux, de manière que leur produit soit ou $1 + \mathfrak{M}\mathrm{N}$ ou $-1 + \mathfrak{M}\mathrm{N}$; ainsi l'on peut dire que, quel que soit N, le produit de tous les nombres inférieurs et premiers à N est toujours de la forme $\pm 1 + \mathfrak{M}\mathrm{N}$, et que par conséquent l'un ou l'autre des facteurs

$$a.b.c. \ldots \overline{\mathrm{N} - 1} + 1, \quad \text{ou} \quad a.b.c. \ldots \overline{\mathrm{N} - 1} - 1.$$

est divisible par N comme nous l'avions avancé.

22. Il s'agit maintenant de reconnaître ces deux cas. Nous avons déjà remarqué que parmi les nombres a, b, c, d, etc., $N-1$, il y a toujours deux nombres x et $N-x$ qui sont tels qu'on a

$$\frac{1+\mathfrak{M}N}{x} = x \quad \text{ou} \quad 1+\mathfrak{M}N = x^2;$$

ce sont les deux nombres 1 et $N-1$; mais il peut y en avoir d'autres suivant la nature du nombre N.

Or, si N est tel qu'il y ait un nombre pair de ces couples qui puissent donner $1+\mathfrak{M}N = x^2$, il y aura un nombre pair d'expressions de la forme

$$-1+\mathfrak{M}N = x(N-x);$$

le produit total sera donc de la forme $1+\mathfrak{M}N$, et, dans ce cas, ce sera le facteur $a.b.c.d\ldots\overline{N-1}-1$ qui sera divisible par N.

Mais si le nombre de ces couples dont le produit est de la forme $-1+\mathfrak{M}N$, est impair, le produit total sera aussi de la forme $-1+\mathfrak{M}N$, et alors ce sera le facteur $a.b.c.d\ldots N-1+1$ qui sera divisible par N.

23. Ainsi tout se réduit à reconnaître, d'après la nature du nombre N, si l'équation

$$x^2-1 = \mathfrak{M}N$$

a des solutions conjuguées x et $N-x$, en nombre pair ou en nombre impair.

Or, je dis que l'équation

$$x^2-1 = \mathfrak{M}N, \quad \text{ou} \quad (x+1)(x-1) = \mathfrak{M}N,$$

a autant de couples de ces solutions conjuguées, qu'il y a de manières de partager N en deux facteurs P et Q premiers entre eux, ou n'ayant tout au plus que le commun diviseur 2.

En effet, il est clair que les deux binômes $x+1$ et $x-1$, ou sont premiers entre eux, ou n'ont pas de plus grand commun diviseur que 2. Donc leur produit ne peut être divisible par N qu'autant qu'un de ces binômes $x+1$ le sera par un facteur P de N, et le second binôme $x-1$ par l'autre facteur Q ces deux facteurs étant ou premiers

entre eux, ou sans autre commun diviseur que 2). Et réciproquement, on voit qu'à chacune de ces décompositions de N dans les deux facteurs P et Q, répondra un couple de valeurs de x, pour la résolution de l'équation

$$(x+1)(x-1) = \mathfrak{M}N.$$

Et si l'on veut trouver ces valeurs, on fera d'abord

$$x+1 = mP, \quad \text{et en même temps} \quad x-1 = m'Q,$$

ce qui donne

$$mP - m'Q = 2,$$

équation toujours possible puisque P et Q sont premiers entre eux, ou le deviennent en les divisant par le nombre 2 qui forme le second membre; on en tirera donc les valeurs des multiples m et m', et de là la valeur de x.

Ensuite, changeant l'ordre des facteurs P et Q, on ferait

$$x+1 = \mu Q, \quad \text{et} \quad x-1 = \mu' P,$$

et l'on trouverait de même

$$\mu Q - \mu' P = 2,$$

d'où l'on tirerait les nouveaux multiples μ et μ', et de là, la valeur conjuguée de x; mais ce calcul est inutile, puisque cette seconde valeur est évidemment $PQ - x$. En effet, si des deux binômes $x+1$, $x-1$, le premier est divisible par P et le second par Q, il s'ensuit qu'en changeant x en $PQ - x$, le premier, au contraire, devient divisible par Q et le second par P.

Ainsi donc on a pour l'équation

$$x^2 - 1 = \mathfrak{M}N, \quad \text{ou} \quad 1 + \mathfrak{M}N = x^2,$$

autant de couples de valeurs de x qu'il y a de manières de partager N en deux facteurs soit premiers entre eux, soit dépourvus de tout autre commun diviseur que 2.

24. Or, soit d'abord N *impair* ou *double* d'un impair; il n'y a lieu qu'à des décompositions de ce nombre en facteurs premiers entre eux : et si k marque le nombre des facteurs simples qui entrent dans N, on

sait que le nombre de ces décompositions est marqué par 2^{k-1}. (Voyez plus loin le n° **29.**) Ainsi ce nombre est toujours pair, excepté lorsqu'on a $k = 1$, ce qui répond au cas où le nombre N n'a qu'un seul facteur simple, c'est-à-dire est de la forme p^m, p étant un nombre premier.

Donc, pour $N = p^m$, c'est-à-dire *pour une puissance quelconque m d'un nombre premier p impair, on a toujours*

$$1.a.b.c.d\ldots N - 1 + 1 = \mathfrak{M}N;$$

ce qui renferme, comme cas particulier, le théorème de Wilson, en faisant $m = 1$.

Si $N = 2p^m$, on a bien deux décompositions possibles de N en deux facteurs premiers entre eux, savoir, 1 et $2p^m$, et puis 2 et p^m; mais ces deux décompositions répondent aux mêmes solutions de

$$x^2 - 1 = \mathfrak{M}(2p^m),$$

puisque si l'un des binômes $x + 1$ et $x - 1$ est divisible par $2p^m$ et par conséquent par 2, l'autre est aussi divisible par 2. Ainsi, dans le cas de $N = 2p^m$, p étant un nombre premier quelconque, excepté 2, il n'y a encore qu'un seul couple de solutions possibles pour

$$x^2 - 1 = \mathfrak{M}N;$$

et partant, on a, comme ci-dessus,

$$1.a.b.c.d\ldots N - 1 + 1 = \mathfrak{M}N;$$

mais pour tous les autres cas de N *impair* ou *simplement pair*, on a

$$1.a.b.c.d\ldots N - 1 + 1 = \mathfrak{M}N.$$

25. Soit à présent N *pairement pair* ou d'un degré supérieur de parité; et soit k le nombre des facteurs simples qui entrent dans la composition de N; on aura d'abord 2^{k-1} pour le nombre de toutes les décompositions possibles en deux facteurs premiers entre eux, et puis encore 2^{k-1} pour le nombre des décompositions en deux facteurs non premiers entre eux, mais sans autre commun diviseur que 2; donc le nombre total des décompositions sera 2.2^{k-1} ou 2^k, et par conséquent

toujours pair, et l'on aura

$$1.a.b.c.d \text{ etc. } \overline{N-1} - 1 = \mathfrak{M}N.$$

26. On exceptera pourtant le cas du nombre $N = 2.2$ ou 4; car à cause de la propriété de chacun des binômes $x + 1$ et $x - 1$, qui est de ne pouvoir être divisible par 2, sans que l'autre ne le soit en même temps, il est clair que les deux solutions de $x^2 - 1 = \mathfrak{M}4$ sont les mêmes, soit pour la décomposition de 4 en 1 et 4, soit pour la décomposition de 4 en 2 et 2, comme on l'a déjà remarqué plus haut, pour le cas de $N = 2p^m$.

27. Ainsi, pour nous résumer, *le produit de tous les nombres* $1, a, b, c$, etc., $N - 1$, *inférieurs et premiers à* N, *étant augmenté de l'unité, est divisible par* N *dans tous les cas de* $N = p$ *ou* $2p$, p *étant un nombre premier quelconque; et dans le cas de* $N = p^m$ *ou* $2p^m$, p *étant un nombre premier quelconque, mais autre que le nombre* 2.

Pour tous les autres cas, le produit des nombres inférieurs et premiers à N, *étant, au contraire, diminué de l'unité, est toujours divisible par* N.

28. M. Gauss, dans ses *Disquisitiones arithmeticæ*, a indiqué cette extension du théorème de Wilson, pour des nombres quelconques N; mais comme il n'a point ajouté la démonstration des différents cas, il m'a paru assez intéressant d'éclaircir ce théorème qui dépend essentiellement de la résolution de l'équation binôme

$$x^2 - 1 = \mathfrak{M}N,$$

et du nombre des racines qu'elle admet suivant la nature du nombre donné N. On a vu d'ailleurs comment cette équation indéterminée se résout tout de suite au moyen d'une autre qui n'est que du premier degré, et dont la solution s'obtient par les méthodes connues.

Article V.

Sur toutes les décompositions possibles d'un nombre en deux facteurs premiers entre eux.

29. J'ai dit plus haut que le nombre de manières de décomposer $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, en deux facteurs P et Q premiers entre eux, était marqué par 2^{k-1}, k étant le nombre des facteurs simples $a, b, c, \ldots$ qui

entrent dans la composition de N. On peut facilement démontrer ce théorème, comme le fait Legendre, en le tirant comme cas particulier d'un autre théorème où l'on considère tous les diviseurs possibles du nombre N; mais on peut aussi le démontrer directement et de la manière la plus simple, par la considération suivante. Et d'abord, puisque P et Q sont supposés premiers entre eux, on voit que chacun des diviseurs simples a, b, c,... ne peut jamais entrer que dans un seul des deux facteurs P et Q. Et par conséquent les exposants α, β, γ,... de ces diviseurs simples n'influent en aucune sorte sur le nombre cherché, qui est le même que si l'on avait simplement $N = abc\ldots$ et qui ne dépend ainsi que du nombre k de ces diviseurs simples a, b, c, etc.; or, si l'on veut compter maintenant en combien de manières ce produit $abc\ldots$ peut être partagé en deux facteurs P et Q, il n'y a qu'à voir de combien de manières on peut prendre les lettres a, b, c,... une à une, ce qui donne d'abord le nombre k; et puis ces mêmes lettres 2 à 2, ce qui donne $\frac{k.\overline{k-1}}{2}$; et puis ces mêmes lettres 3 à 3, ce qui donne $\frac{k.\overline{k-1}.\overline{k-2}}{2.3}$; et ainsi de suite jusqu'aux combinaisons $k-1$ à $k-1$; et l'on aura d'abord le nombre

$$k + \frac{k.\overline{k-1}}{2} + \frac{k.\overline{k-1}.\overline{k-2}}{2.3} + \text{etc.},$$

qui sera double du nombre des décompositions que l'on considère, puisque celles qui répondent aux combinaisons 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, etc., sont les mêmes qui répondent respectivement aux combinaisons $k-1$ à $k-1$, $k-2$ à $k-2$, $k-3$ à $k-3$, etc. Donc, si l'on ajoute au nombre précédent le nombre 2 ou $1+1$, pour compter aussi deux fois la dernière décomposition de N dans les facteurs premiers entre eux 1 et N, on aura

$$1 + k + \frac{k.\overline{k-1}}{2} + \frac{k.\overline{k-1}.\overline{k-2}}{2.3} + \text{etc.} + 1,$$

qui sera double de toutes les décompositions possibles que nous cherchons. Mais il est évident que cette suite n'est autre chose que $(1+1)^k$ ou 2^k; donc, en divisant par 2, on a pour le nombre cherché 2^{k-1}, comme nous l'avions supposé.

CHAPITRE II.

Démonstrations nouvelles des théorèmes qui précèdent.

Quoique les démonstrations que j'ai indiquées plus haut soient assez claires, il me semble qu'on en pourrait encore désirer de plus simples et de plus directes, surtout pour des théorèmes si élégants et si utiles dans la science des nombres.

Voici donc, en premier lieu, une nouvelle démonstration très-simple du fameux théorème de Fermat, que j'étendrai sur-le-champ à un nombre quelconque N simple ou composé.

ARTICLE Ier.

Théorème de Fermat généralisé.

1. Soient

$$1, a, b, c, d, \text{etc.}, \overline{N-1},$$

les n nombres inférieurs et premiers à un nombre quelconque N.

Multipliez tous ces nombres par l'un quelconque d'entre eux, x, autre que l'unité; ce qui donnera

$$x, \quad ax, \quad bx, \quad cx, \quad dx, \quad \text{etc.}, \quad \overline{N-1}.x,$$

il est clair que ces n produits seront tous différents entre eux, et de plus premiers à N; et que, par conséquent, étant rabaissés au-dessous de N par la division, ils ramèneront dans un autre ordre la première suite

$$1, a, b, c, d, \text{etc.}, \overline{N-1}.$$

Donc le produit de ces nouveaux nombres x, ax, bx, etc., qui est $x^n(abc\ldots\overline{N-1})$, sera équivalent au produit des premiers $(abcd\ldots\overline{N-1})$, relativement au nombre N; de sorte qu'on aura

$$x^n(abcd\ldots\overline{N-1}) = (abcd\ldots\overline{N-1}) + \partial\pi N,$$

et, divisant de part et d'autre par $(abcd\ldots N-1)$, qui est un produit premier à N, il viendra

$$x^n = 1 + \partial\pi N.$$

$\mathfrak{M}$ désignant un multiple nécessairement entier. C'est-à-dire que la puissance n d'un nombre quelconque x premier à N, étant diminuée de l'unité, est toujours divisible par N; de sorte qu'on a toujours

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\mathrm{N},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Article II.

Théorème de Wilson généralisé, etc.

2. On peut démontrer d'une manière aussi simple le théorème général analogue au théorème de Wilson, que j'ai présenté plus haut, mais qui embrasse à la fois tous les nombres N simples ou composés.

Formez tous les produits $n - 1$ à $n - 1$, des n nombres 1, a, b, c, d, etc., $\mathrm{N} - 1$, inférieurs et premiers à N; et vous aurez n produits différents entre eux, tous premiers à N, et qui, étant rabaissés au-dessous de N par la division, reviendraient aux n premiers nombres proposés 1, a, b, c, d, etc., $\mathrm{N} - 1$, mais dans un nouvel ordre, ce qui est indifférent pour notre objet. Or il est évident que le produit de ces n produits différents est $(abcd\ldots \overline{\mathrm{N} - 1})^{n-1}$; et comme ce produit doit revenir au même, relativement à N, que le simple produit $(abcd\ldots \overline{\mathrm{N} - 1})$, il s'ensuit qu'on a

$$(abcd\ldots \overline{\mathrm{N} - 1})^{n-1} = (abcd\ldots \overline{\mathrm{N} - 1}) + \mathfrak{M}\mathrm{N},$$

ou bien

$$(abcd\ldots \overline{\mathrm{N} - 1})^n = (abcd\ldots \overline{\mathrm{N} - 1})^2 + \mathfrak{M}\mathrm{N}.$$

Mais par le théorème précédent, le premier membre $(abcd\ldots \mathrm{N} - 1)^n$ est égal à l'unité; donc on a

$$(abcd\ldots \mathrm{N} - 1)^2 - 1 = \mathfrak{M}\mathrm{N}:$$

c'est-à-dire que le *carré du produit de tous les nombres inférieurs et premiers à un nombre quelconque* N, *étant diminué de l'unité, est toujours divisible par* N.

3. En considérant les puissances quelconques

$$1,\ a^q,\ b^q,\ c^q\ \text{etc.},\ \overline{\mathrm{N} - 1}^q.$$

on démontrerait de même que leur somme donnerait, relativement à N, le même reste que la somme des nombres

$$x^q,\ x^q a^q,\ x^q b^q,\ x^q c^q,\ \text{etc.},\ x^q \overline{\mathrm{N}-1}^q.$$

et que, par conséquent, la différence

$$(x^q - 1)(1 + a^q + b^q + \text{etc.} + \overline{\mathrm{N}-1}^q)$$

est toujours divisible par N.

Si N est un nombre premier p, et q une puissance inférieure à $p - 1$, le facteur binôme $x^q - 1$, qui ne peut devenir divisible par p pour plus de q valeurs de x, ne le sera donc point pour tous les nombres x, 1, 2, 3, 4, etc., jusqu'à $p - 1$. Donc, en employant pour x une des valeurs qui ne donnent point $x^q - 1$ divisible par p, on en conclura que la somme des puissances q de tous les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \text{etc.},\ p - 1,$$

est toujours divisible par p, q étant inférieur à $p - 1$; et même, comme on le verra plus loin, q étant un nombre quelconque, mais non divisible par $p - 1$.

Remarque sur ces démonstrations et sur les deux principes qui leur servent de base.

4. Les démonstrations précédentes sont d'autant plus remarquables qu'elles ne supposent absolument que ces deux principes d'arithmétique : l'un, que *le résultat d'un produit est toujours le même dans quelque ordre que l'on multiplie les facteurs;* l'autre, que *si deux nombres sont premiers par rapport à un troisième, leur produit est aussi premier par rapport à ce troisième nombre.*

5. Le *premier principe*, qui permet de changer à volonté l'ordre de plusieurs facteurs a, b, c, d, e, h, sans troubler le résultat final de l'opération, est pour ainsi dire évident. Car on voit d'abord qu'on peut changer l'ordre de deux facteurs voisins.

Je suppose, en effet, que l'opération soit faite en suivant cet ordre

$$a.b.\bar{c}.\bar{d}.e.h,$$

et qu'on change l'ordre des deux facteurs voisins c et d, en sorte qu'on

ait actuellement

$$a.b.d.c.e.h.$$

je dis que les produits seront les mêmes. Car, supprimez le dernier facteur h, ce qui ne trouble pas l'égalité, si elle existe; supprimez ensuite, et par la même raison, le facteur e; il suffit de démontrer l'égalité des produits $abcd$ et $abdc$; or, soit p le résultat commun ab, et il ne reste qu'à prouver l'égalité

$$p.c.d = p.d.c;$$

mais le premier produit peut se figurer ainsi :

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{6em}}^{c} \\ d\left\{\begin{array}{l} p\ p\ p\ p\ p\ p\ p\ p, \\ p\ p\ p\ p\ p\ p\ p\ p, \\ p\ p\ p\ p\ p\ p\ p\ p, \\ p\ p\ p\ p\ p\ p\ p\ p, \end{array}\right. \end{array}$$

où l'on voit p pris c fois dans la ligne horizontale, et toute cette ligne $p \times c$ prise d fois.

Mais on y voit également p pris d fois dans la ligne verticale, et toute cette ligne $p \times d$ prise c fois.

Ainsi, le produit $p \times c \times d$, non-seulement est égal au produit $p \times d \times c$, mais il est encore *identique* avec lui : c'est la même chose vue de deux manières différentes.

Actuellement il est clair que le produit de tant de facteurs qu'on voudra est identique avec le produit des mêmes facteurs pris dans un nouvel ordre quelconque. Car, par le théorème précédent, vous pouvez amener un facteur quelconque à la place de son voisin, et par conséquent, de proche en proche, à telle place que vous voudrez. Vous pourrez donc, sans changer l'un des deux produits, mettre ses différents facteurs précisément dans l'ordre où ils sont écrits dans l'autre, auquel cas l'identité de ces deux produits est manifeste.

6. Le *second principe* se trouve démontré dans les *Éléments d'Euclide;* j'en ai donné, il y a longtemps, une démonstration facile, qui

a déja passé dans quelques ouvrages, et que je crois devoir rapporter ici, à cause de sa simplicité.

Si deux nombres a et b sont premiers à N, *leur produit sera aussi premier à* N.

En effet, faites la meme opération que si vous cherchiez le plus grand commun diviseur entre a et N; comme, par hypothèse, ils n'en ont pas d'autre que l'unité, vous trouverez une suite d'équations telles que celles-ci :

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{N}.q + \mathrm{R}, \\ \mathrm{N} &= \mathrm{R}.q' + \mathrm{R}', \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{R} &= \mathrm{R}'.q'' + 1, \end{aligned}$$

où la dernière présentera nécessairement pour dernier reste l'unité.

Multipliez toutes ces équations par b, et vous aurez

$$\begin{aligned} ab &= b\mathrm{N}\,q + b\mathrm{R}, \\ b\mathrm{N} &= b\mathrm{R}\,q' + b\mathrm{R}', \\ &\ldots\ldots\ldots \\ b\mathrm{R} &= b\mathrm{R}'q'' + b. \end{aligned}$$

Or, s'il existait un commun diviseur θ entre ab et N, vous voyez, par la première équation, qu'il diviserait nécessairement bR; et par la deuxième équation, qu'il diviserait nécessairement bR′, etc.; et par la dernière enfin, qu'il diviserait nécessairement b: ainsi, θ diviserait nécessairement N et b, ce qui ne se peut, puisque b est premier à N. Donc ab est premier à N.

Mais on peut encore tirer ce théorème de principes plus simples puisés dans la considération de l'*ordre*, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Article III.

Sur le nombre qui marque combien il y a de nombres inférieurs et premiers à un nombre donné.

7. Quant au nombre n qui marque combien il y a de nombres inférieurs et premiers à un nombre donné N, on sait qu'il dépend de N et des facteurs simples qui entrent dans sa composition : de sorte que si

ces facteurs simples sont représentés par α, β, γ, etc., on a toujours

$$n = N\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \text{etc.}$$

Euler a démontré le premier ce théorème en plusieurs endroits des *Mémoires de Saint-Pétersbourg*. M. Legendre et M. Gauss en ont aussi donné la démonstration dans leurs ouvrages; mais il me semble qu'on en peut encore présenter une autre plus simple, et qui s'offre, pour ainsi dire, d'elle-même dans la question proposée.

En effet, si de la suite des nombres 1, 2, 3, 4,... jusqu'à N, on ôte tous les multiples de α; que des nombres restants on ôte tous les multiples de β, et ainsi de suite; il est clair qu'on aura ôté tous les nombres qui peuvent avoir avec N quelque commun diviseur. Ainsi les nombres restants, qui ne peuvent contenir aucun des facteurs simples de N, seront nécessairement premiers à N. Il s'agit donc d'examiner combien il doit rester successivement de ces nombres, à mesure qu'on retrancherait de la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ldots,\ N$$

tous les multiples de α; et du reste tous les multiples de β; et du nouveau reste les multiples de γ, et ainsi de suite.

Or, il est évident que le nombre des multiples de α, contenus dans la suite précédente, est le sous-multiple α du nombre N de tous les termes, c'est-à-dire est $\frac{N}{\alpha}$: car on ne trouve ces multiples de α, qu'en prenant les termes de α en α, à partir du premier 1: on aura donc, pour le nombre N′ des termes restants, quand on ôte les $\frac{N}{\alpha}$ multiples de α,

$$N' = N - \frac{N}{\alpha},$$

ou bien

$$N' = N\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Actuellement, de ces N′ nombres il faut ôter les multiples de β; or je dis qu'il y en a la même partie aliquote que dans les N premiers, c'est-à-dire qu'il y en a $\frac{N'}{\beta}$. En effet, je puis voir ces N′ termes comme com-

posés de la suite des N premiers, moins la suite des multiples de α qu'on a soustraits; or, dans la première suite, il y a $\frac{N}{\beta}$ multiples de β, et dans la seconde, qui est aussi une progression arithmétique, il est clair qu'il y en a la même aliquote. Donc, dans les N′ termes qui font comme la différence des deux suites, il y en a aussi la même aliquote, c'est-à-dire $\frac{N'}{\beta}$. Donc on a, comme plus haut, en marquant par N″ le nombre des termes qui restent,

$$N'' = N'\left(1 - \frac{1}{\beta}\right).$$

Maintenant, de ces nombres restants il faut ôter tous les multiples de γ: or je dis que dans ces N″ termes restants, il y en a encore la même aliquote que dans les N premiers et dans les N′ seconds; c'est-à-dire qu'il y en a $\frac{N''}{\gamma}$. Car je puis voir ces N″ termes restants comme composés des N′ précédents, moins les $\frac{N'}{\beta}$ multiples de β qui y sont contenus.

Or, dans la première suite des N′ termes, il est clair, comme ci-dessus, qu'il y a $\frac{N'}{\gamma}$ multiples de γ; et dans la seconde, qui est composée des $\frac{N'}{\beta}$ multiples de β, il est facile de voir qu'il y en a aussi la même aliquote (car cette suite n'est autre chose que les multiples de β pris dans N, moins les multiples de β pris dans les $\frac{N}{\alpha}$ multiples de α); donc, dans la différence N″, il y a $\frac{N''}{\gamma}$ multiples de γ; donc, en ôtant les multiples de γ, on aura pour le nombre N‴ de ceux qui restent :

$$N''' = N''\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

et ainsi de suite.

Ainsi l'on a

$$N' = N\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

$$N'' = N\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right).$$

$$N''' = N\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right). \text{ etc..}$$

et par conséquent

$$n = N\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\cdots$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque I.

8. Cette démonstration très-simple résulte, comme on voit, de ce principe que, dans les diverses suites de nombres que l'on considère, il y a toujours la même aliquote des multiples d'un même facteur. Ainsi, quand des N premiers nombres ou multiples de 1, on veut ôter les multiples de α et compter ceux qui restent, il faut retrancher une partie $\frac{1}{\alpha}$ de ces N nombres, ou multiplier N par $1 - \frac{1}{\alpha}$: et parmi ces nombres restants, il y a encore proportionnellement autant de multiples de β, qu'il y en a dans les N premiers, et par conséquent il y en a une partie $\frac{1}{\beta}$. Donc, si l'on veut les ôter et compter ceux qui restent, il faut multiplier le premier résultat $N\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$ par $1 - \frac{1}{\beta}$, et ainsi de suite.

Dans les *Mémoires de Saint-Pétersbourg* pour 1780, je trouve qu'Euler a présenté une démonstration semblable qu'il regarde, avec raison, comme la plus simple, et dont l'idée lui avait été donnée par la manière même dont se compose la formule précédente, qu'il avait déjà trouvée par une autre analyse. Mais il y a une remarque importante à faire sur cette dernière démonstration : c'est qu'Euler y suppose précisément ce qui en fait toute la force, je veux dire, qu'il y a toujours la même aliquote des multiples d'un même facteur dans ces diverses suites où le nombre des termes est N, N′, N″, etc. Or cela ne se voit clairement que pour la première suite, car les autres cessent d'être des progressions par différence, et deviennent de plus en plus irrégulières. Ainsi l'auteur omet le seul point essentiel de la démonstration, le reste n'ayant aucune difficulté, et le théorème ne se trouvait point par là solidement établi.

Remarque II.

9. Le nombre N étant par hypothèse de la forme $N = \alpha^{\lambda}\beta^{\mu}\gamma^{\nu}\ldots$,

l'expression précédente de n, qui est

$$n = \mathrm{N}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\cdots$$

peut se réduire à celle-ci

$$n = \alpha^{\lambda-1}(\alpha - 1).\beta^{\mu-1}(\beta - 1).\gamma^{\nu-1}(\gamma - 1)\ldots,$$

où l'on voit facilement que, *si le nombre* $\mathrm{N} = \alpha^{\lambda}\beta^{\mu}\gamma^{\nu}\ldots$ *est partagé en facteurs quelconques* P, Q, R,... *premiers entre eux, le nombre* n, *qui marque combien il y a de nombres inférieurs et premiers à* N, *est égal au produit de ceux qui marqueraient de même combien il y a de nombres inférieurs et premiers à chacun des facteurs* P, Q, R,... *de* N.

Ainsi en indiquant, comme le fait Euler, par le signe $\varphi(\mathrm{N})$ la multitude des nombres inférieurs et premiers à un nombre N, si l'on suppose ce nombre décomposé d'une manière quelconque en facteurs P, Q, R, etc., premiers entre eux, on a ce théorème élégant

$$\varphi(\mathrm{N}) = \varphi(\mathrm{PQR}\ldots) = \varphi(\mathrm{P}).\varphi(\mathrm{Q}).\varphi(\mathrm{R})\ldots.$$

Remarque III.

10. Si l'on décomposait N dans les deux facteurs 1 et N qui sont premiers entre eux, on aurait donc

$$\varphi(\mathrm{N}) = \varphi(1)\,\varphi(\mathrm{N}),$$

d'où l'on voit qu'il faut compter $\varphi(1)$ comme égal à 1. Cependant on ne peut pas dire qu'il y ait aucun nombre *inférieur* et premier à 1; mais on peut dire qu'il y a un nombre premier à 1 et *non plus grand* que 1, et qui est 1 lui-même; car ces deux nombres 1 et 1, quoiqu'ils soient égaux, doivent être regardés, suivant la définition, comme premiers entre eux, puisqu'ils n'ont d'autre commun diviseur que l'unité. C'est, au reste, une propriété qui n'appartient qu'à ces seuls nombres égaux. Donc, si l'on veut envelopper aussi ce cas unique dans la même expression commode que j'ai employée jusqu'ici, il faut entendre, par nombre premier et *inférieur* à un autre, un nombre premier à cet autre et *non plus grand*. Et de cette manière, ce cas singulier qui regarde l'unité se trouvera compris parmi tous les autres.

Remarque IV.

11. L'expression générale du nombre n fait voir encore que n est toujours pair, excepté dans le cas de

$$N = 1 \quad \text{et} \quad N = 2,$$

où l'on a

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(2) = 1.$$

Si $N = 2I$, I étant un nombre impair, on a

$$\varphi(N) = \varphi(I)\,\varphi(2),$$

et partant

$$\varphi(2I) = \varphi(I).$$

Ainsi il n'y a pas plus de nombres inférieurs et premiers au double d'un impair, qu'à cet impair lui-même. En géométrie, j'ai fait voir qu'il y a autant d'espèces de polygones réguliers de N côtés, qu'il y a de nombres inférieurs et premiers à N, ou simplement la moitié, si l'on ne veut compter que les polygones qui font à nos yeux des images différentes. On voit donc que, pour les polygones de 2I côtés, il n'y a pas plus d'espèces différentes que pour les polygones d'un nombre I de côtés, deux fois moindre. Ainsi, il n'y a pas plus d'espèces d'hexagones que d'espèces de triangles; pas plus de décagones que de pentagones, etc., mais ce sont les seuls cas où la chose ait lieu; car 2 est, après l'unité, le seul nombre qui donne $\varphi(2) = 1$.

Article IV.

Sur le nombre de tous les diviseurs possibles d'un nombre donné.

12. Considérons maintenant tous les diviseurs possibles que peut avoir un nombre $N = \alpha^\lambda \beta^\mu \gamma^\nu \ldots$, en y comprenant 1 et le nombre N lui-même. Il est clair que ces diviseurs ne sont autre chose que les différents termes du produit fait de ces progressions géométriques

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^\lambda,$$
$$1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \ldots + \beta^\mu,$$
$$1 + \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \gamma^4 + \ldots + \gamma^\nu,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'où l'on voit, par la théorie des combinaisons, que le *nombre total* de ces termes est exprimé par

$$(\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1)\ldots.$$

Quant à la *somme* de ces mêmes termes, elle est le produit de nos progressions géométriques, et par conséquent

$$\frac{\alpha^{\lambda+1} - 1}{\alpha - 1} \cdot \frac{\beta^{\mu+1} - 1}{\beta - 1} \cdot \frac{\gamma^{\nu+1} - 1}{\gamma - 1} \ldots.$$

Sur le nombre qui marque combien il y a de nombres inférieurs et premiers à tous les diviseurs possibles d'un nombre donné.

13. Mais supposons ici qu'on veuille compter combien il y a de nombres inférieurs et premiers à tous ces diviseurs possibles. Si l'on ne regarde d'abord que les diviseurs élémentaires qui forment les termes de nos progressions, on aura ces différentes suites :

$$1 + \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha^2) + \varphi(\alpha^3) + \ldots + \varphi(\alpha^\lambda),$$
$$1 + \varphi(\beta) + \varphi(\beta^2) + \varphi(\beta^3) + \ldots + \varphi(\beta^\mu),$$
$$1 + \varphi(\gamma) + \varphi(\gamma^2) + \varphi(\gamma^3) + \ldots + \varphi(\gamma^\nu).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, en vertu du théorème précédent (n° **9**), il est manifeste que si l'on fait le produit de ces séries, on aura pour résultat une suite de termes dont chacun marquera combien il y a de nombres inférieurs et premiers à chaque terme du produit de nos progressions, et par conséquent, à tous les diviseurs possibles de N ; mais chaque série

$$1 + \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha^2) + \varphi(\alpha^3) + \ldots + \varphi(\alpha^\lambda)$$

vaut $\quad 1 + (\alpha - 1) + \alpha(\alpha - 1) + \alpha^2(\alpha - 1) + \ldots + \alpha^{\lambda-1}(\alpha - 1)$,

c'est-à-dire vaut 1 plus une progression géométrique dont la somme est $\alpha^\lambda - 1$; donc la première série vaut en somme $1 + \alpha^\lambda - 1$, c'est-à-dire α^λ. De même la deuxième série vaut en somme β^μ, et la troisième γ^ν, et ainsi des autres ; donc le produit de ces suites, ou le nombre cherché, est $\alpha^\lambda \beta^\mu \gamma^\nu \ldots$, c'est-à-dire le nombre N lui-même.

On a donc ce théorème remarquable et qui nous sera utile dans la théorie des *racines primitives* :

Si l'on considère tous les diviseurs possibles d'un nombre quelcon-

que N, *et qu'on veuille compter combien il y a de nombres inférieurs et premiers à chacun d'eux, on trouvera en somme totale le nombre* N *lui-même.*

M. Gauss est, je crois, le premier qui ait donné ce théorème dans ses *Disquisitiones arithmeticæ;* mais sa démonstration, qui nous a paru un peu difficile, diffère en entier de la précédente. Il me semble que la nôtre est aussi directe et aussi claire qu'on puisse le désirer.

14. Avant de quitter ce sujet, j'ajouterai encore une proposition très-simple qui peut aussi servir dans la théorie des nombres.

On a fait voir plus haut que, si un nombre quelconque N est résolu en différents facteurs premiers entre eux, P, Q, R, etc., le nombre n, qui marque combien il y a de nombres inférieurs et premiers à N, s'exprime facilement au moyen de ceux qui marquent combien il y a de nombres inférieurs et premiers aux différents facteurs P, Q, R,... de sorte qu'on a cette formule élégante

$$n = \varphi\,\mathrm{N} = \varphi\,\mathrm{PQR}\ldots = \varphi\,\mathrm{P}).\varphi\,\mathrm{Q}.\varphi\,\mathrm{R}\ldots.$$

Or je vais démontrer que ces nombres premiers à N peuvent aussi s'exprimer à l'aide de ceux qui sont premiers aux facteurs P, Q, R,... de ce nombre composé N

15. Soient e un nombre quelconque premier à N; et p, q, r,... des nombres respectivement premiers à ses facteurs P, Q, R,...; je dis qu'on aura, pour l'expression des nombres e premiers à N,

$$e = p\mathrm{QR} + q\mathrm{PR} + r\mathrm{PQ} + \ldots.$$

En effet, il est aisé de voir que le second membre sera toujours premier à N. Car soit, s'il est possible, θ un nombre qui divise à la fois la somme

$$p\mathrm{QR} + q\mathrm{PR} + r\mathrm{PQ} + \ldots$$

et le nombre

$$\mathrm{N} = \mathrm{PQR}\ldots;$$

θ diviserait nécessairement un des facteurs P, Q, R,... puisque ces facteurs sont premiers entre eux par l'hypothèse. Or, dans l'expression de e, qui est

$$p\mathrm{QR} + q\mathrm{PR} + r\mathrm{PQ} + \ldots$$

ce facteur P, que θ diviserait, entre dans tous les termes, hors dans un seul; tous ces termes sont donc divisibles par θ; la somme entière doit l'être aussi par hypothèse; donc le seul terme pQR où P n'entre pas doit l'être aussi : mais ni Q, ni R, etc., ne peuvent l'être par θ puisqu'ils sont premiers à P; donc p devrait être divisible par θ, aussi bien que P; donc p ne serait pas premier à P, contre l'hypothèse. Donc

$$e = p\mathrm{QR} + q\mathrm{PR} + r\mathrm{PQ} + \ldots$$

est premier à PQR..., *ce qu'il fallait démontrer.*

16. En prenant pour p, q, r,... tous les nombres respectivement inférieurs à P, Q, R,..., on aura, par la théorie des combinaisons,

$$\varphi(\mathrm{P}) \cdot \varphi(\mathrm{Q}) \cdot \varphi(\mathrm{R}) \ldots$$

pour le nombre des valeurs de e; et il est aisé de voir que toutes ces valeurs seront différentes entre elles relativement au module N.

En effet, soient, s'il est possible, deux valeurs

$$p\,\mathrm{QR} + q\,\mathrm{PR} + r\,\mathrm{PQ} + \ldots,$$
$$p'\mathrm{QR} + q'\mathrm{PR} + r'\mathrm{PQ} + \ldots,$$

qui donneraient le même nombre e premier à N; il faudrait que la différence

$$(p - p')\,\mathrm{QR} + (q - q')\,\mathrm{PR} + (r - r')\,\mathrm{PQ} + \ldots$$

fût divisible par

$$\mathrm{N} = \mathrm{PQR}\ldots$$

et je dis que cela est impossible, à moins qu'on n'ait

$$p = p', \quad q = q', \quad r = r', \quad \text{etc.}$$

Car si cette différence est divisible par PQR.... a plus forte raison le sera-t-elle par le facteur P; mais tous les termes le sont par P, hors le premier $(p - p')$QR; donc il faudrait que celui-ci le fût; mais Q, R,... sont premiers à P; donc il faudrait que $p - p'$ fût divisible par P, ce qui ne se peut, puisque p et p' sont deux nombres différents inférieurs à P.

Ainsi les deux expressions précédentes ne peuvent donner le même nombre e, à moins qu'on n'ait $p' = p$; et, par une raison toute semblable, $q' = q$, $r' = r$, etc., auquel cas ces expressions se confondent.

Donc la formule

$$e = p\mathrm{QR} + q\mathrm{PR} + r\mathrm{PQ} + \ldots,$$

en y prenant pour p un nombre inférieur et premier à P, pour q un nombre inférieur et premier à Q, etc., est l'expression générale des nombres e premiers à $\mathrm{N} = \mathrm{PQR}\ldots$, et elle n'en donne qu'un nombre $\varphi(\mathrm{P}).\varphi(\mathrm{Q}).\varphi(\mathrm{R})\ldots$ de *différents*, comme cela doit être.

CHAPITRE III.

Démonstrations nouvelles tirées de la considération de l'ordre

Il semble que les démonstrations précédentes sur les premières propriétés des nombres soient aussi simples qu'on puisse le désirer. Elles rattachent les théorèmes à quelques principes élémentaires, et elles en font voir en quelque sorte la liaison et la dépendance mutuelle. Cependant il faut convenir que l'esprit n'est pas encore conduit dans cette matière par une analyse bien directe, et qu'on ne voit pas ce qui a pu donner l'idée de ces théorèmes qui paraissent si curieux et si importants dans la théorie des nombres. Sans doute la considération des restes que donne la division des puissances successives d'un nombre par un même diviseur premier se présente assez naturellement en arithmétique, et c'est par là que les géomètres paraissent avoir commencé cette première partie de la théorie des nombres. Mais il me semble que ces théorèmes ont une source plus profonde dans la science des mathématiques, et qu'ils doivent tenir à des principes d'un ordre plus élevé, de manière à ce qu'on voie que ce n'est point par hasard que l'esprit s'est attaché à ces spéculations, qu'elles ne sont point de pure curiosité, mais puisées dans la nature même des choses, et qu'elles forment une partie fondamentale de la science mathématique considérée de la manière la plus générale : et, pour en donner une idée, je vais présenter de nouvelles démonstrations, uniquement tirées de la considération de l'*ordre* qu'on peut observer actuellement entre plusieurs objets.

1. Considérons donc plusieurs objets a, b, c, d, e, etc., situés d'une manière quelconque dans l'espace, et regardons-les d'abord dans un

certain ordre tel que celui-ci : a, b, c, d, e, etc., de manière qu'après a vienne b, ensuite c, ensuite d, etc. : et comme ici nous n'avons en vue que le nombre et l'ordre, supposons que tous ces objets soient égaux, à égales distances l'un de l'autre, et simplement représentés par N points a, b, c, d, etc., rangés en cercle, et formant ainsi les sommets d'un polygone régulier de N côtés.

Cela posé, si à partir de l'un d'eux, comme du point a par exemple, on va de l'un à l'autre en les prenant successivement de 2 en 2, ou de 3 en 3, ou en général de h en h, et que cet intervalle constant h par lequel on saute soit premier à N, je dis qu'on passera nécessairement par tous les points a, b, c, d, etc., avant de revenir au point a d'où l'on est parti.

En effet, supposons qu'on ne passe que par une partie de ces N points ou sommets, c'est-à-dire par un nombre n d'entre eux, n étant inférieur à N; on aurait donc formé un polygone régulier de n côtés, et dont chaque côté répondrait à un nombre h de côtés consécutifs sur le premier polygone. En suivant le contour entier de ce polygone, ce qui vous fera faire une ou plusieurs fois le tour du cercle, vous pourriez donc compter un nombre nh de points sur la route parcourue; et comme vous êtes revenu au point de départ, par hypothèse, vous auriez ainsi ce nombre nh égal à un multiple exact des N points de la circonférence entière. Ainsi il faudrait que nh fût un multiple de N; mais h est premier à N et n est inférieur à N; donc le produit nh n'est pas divisible par N, et par conséquent n'en peut être un multiple.

Donc, pour que le produit nh soit un multiple exact de N, tel que qN, il faut nécessairement que n soit égal à N, et alors il s'ensuit que q est égal à h. D'où l'on conclut ce théorème :

Si l'on a N *points rangés en cercle, et qu'on les joigne de h en h, h étant premier à* N, *on passe nécessairement par tous les* N *points avant de retomber sur le point de départ; et l'on fait nécessairement h fois le tour entier de la circonférence.*

2. Réciproquement, *si en joignant* N *points de h en h, on passe par tous ces points avant de revenir au premier, h sera nécessairement premier à* N. Car alors h ne pourra mesurer exactement de multiple de N, qui soit moindre que $h \times$ N; et par conséquent la plus grande

aliquote de h qui puisse mesurer N, sera l'aliquote $\frac{h}{h}$ ou l'unité; et par conséquent h et N seront premiers entre eux.

Si donc en joignant ainsi plusieurs points par des intervalles quelconques égaux, on ne peut jamais revenir au premier sans avoir passé par tous les autres, on peut assurer que tous ces points sont en nombre premier absolument : ce qui donne une espèce de définition géométrique d'un nombre *premier*.

3. Si *h et N ne sont pas premiers entre eux, je dis qu'en joignant les N points de h en h, on ne passera que par $\frac{N}{\delta}$ d'entre eux ; δ étant le plus grand commun diviseur des deux nombres h et N.*

Il est bien aisé de déduire cette proposition de la première, où h et N sont premiers entre eux; mais on peut aussi la démontrer directement de la manière suivante, et comprendre ainsi en un seul les deux théorèmes dont il s'agit.

Démonstration. Portez h sur la circonférence N jusqu'à ce que vous reveniez au point de départ (ce qui ne peut jamais manquer d'arriver après avoir fait h fois le tour du cercle au plus); vous aurez donc fait un certain nombre de fois q, le tour de la circonférence, et vous aurez le plus petit multiple qN que vous puissiez mesurer par le nombre h; donc la plus grande aliquote de h qui pourra mesurer N sera $\frac{h}{q}$, et par conséquent $\frac{h}{q}$ sera égal au plus grand commun diviseur de h et de N; de sorte qu'on aura

$$\frac{h}{q} = \delta, \quad \text{ou} \quad q = \frac{h}{\delta}.$$

Or, si l'on désigne par x le nombre des côtés h du polygone qu'on aura formé, lequel nombre x marquera aussi celui des sommets ou points par lesquels on aura passé, on aura évidemment le produit xh égal au multiple qN de la circonférence N : ce qui donne, à cause de q égal à $\frac{h}{\delta}$,

$$xh = \frac{Nh}{\delta}, \quad \text{et par conséquent,} \quad x = \frac{N}{\delta}.$$

Ainsi l'on ne passera que par un nombre x de points marqué par $\frac{N}{\theta}$, et l'on aura fait le tour entier de la circonférence un nombre de fois q, marqué par $\frac{h}{\theta}$; *ce qu'il fallait démontrer.*

4. Cette démonstration est générale pour deux nombres quelconques h et N. Si leur plus grand commun diviseur θ est égal à l'unité, les deux nombres sont premiers entre eux, et alors, à cause de $\theta = 1$, on a $x = N$, et $q = h$; ce qui redonne, comme conséquence, le premier théorème qu'on avait démontré.

5. On peut remarquer encore que cette démonstration ne suppose aucune propriété des nombres ni aucun théorème d'arithmétique, pas même cette théorie du plus grand commun diviseur que nous devons à Euclide. Elle donnerait même, au besoin, pour la recherche de ce commun diviseur, une règle nouvelle qu'on pourrait suivre en arithmétique et en géométrie, et qui ne paraît pas moins élégante.

Règle nouvelle pour trouver la plus grande commune mesure de deux grandeurs, ou le plus grand commun diviseur de deux nombres donnés.

6. Soit à trouver la plus grande commune mesure de deux grandeurs A et B; portez l'une d'elles A sur l'autre B, et si elle y est contenue exactement un certain nombre de fois, la grandeur A sera elle-même la commune mesure. Mais s'il y a un reste, au lieu de prendre ce reste et de le porter sur la première A, comme on le fait ordinairement, portez toujours la même grandeur A, non plus sur la grandeur simple B, mais sur le *double* de B; s'il n'y a pas de reste, la *moitié* de la première A mesure la seconde B, et c'est la plus grande commune mesure. S'il y a encore un reste, continuez toujours de porter A, mais sur le triple 3B de la seconde B; si elle y tombe un nombre exact de fois, le *tiers* de A sera la commune mesure de A et B, et ainsi de suite : de sorte que si la première grandeur A ne commence à mesurer juste que le multiple mB de la seconde, $\frac{A}{m}$ sera nécessairement la plus grande commune mesure des deux grandeurs A et B.

Et, en effet, s'il y avait une autre aliquote de A qui pût mesurer B,

telle que l'aliquote $\frac{A}{m'}$, et qui fût plus grande que $\frac{A}{m}$, ce qui donnerait $m' < m$; alors, comme $\frac{A}{m'}$ mesurerait B, il est évident que A mesurerait exactement m'B, et par conséquent un multiple de B, plus petit que le multiple mB : or cela ne se peut, puisque mB est le premier, et par conséquent le *plus petit* multiple de B que vous ayez pu mesurer par la grandeur A. Donc $\frac{A}{m}$ est la plus grande commune mesure $\mathcal{G}$ des deux grandeurs A et B.

Si, au lieu de prendre la grandeur A pour la porter sur B, on prend B pour la porter sur A, ou 2A, ou 3A, ou etc., jusqu'à ce qu'on rencontre le plus petit multiple nA que B mesure exactement, on aura de même $\frac{B}{n}$ pour la plus grande commune mesure des deux grandeurs proposées.

D'où l'on voit, en comparant cette seconde expression à la première, que le rapport $\frac{A}{B}$ sera exprimé par la fraction $\frac{m}{n}$, fraction qui se trouvera toute réduite à sa plus simple expression.

7. En *opérant sur les nombres*, on diviserait le nombre B par A, on aurait un certain quotient et un reste; on ajouterait à ce reste le dividende B, et l'on continuerait de diviser par A, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvînt à une division sans reste; alors on diviserait A par le nombre m de divisions effectuées, et $\frac{A}{m}$ serait la plus grande partie de A capable de mesurer B, ou le plus grand commun diviseur des deux nombres A et B. Mais le procédé serait plus long que par la méthode ordinaire.

8. En *Géométrie*, on prendrait une ligne indéfinie sur laquelle on porterait successivement des parties égales à l'une B des deux lignes données; on porterait ensuite l'autre ligne A, à partir d'un point de division, jusqu'à ce qu'on retombât sur un autre point de division, et si cela arrivait après avoir mesuré la longueur mB, $\frac{A}{m}$ serait la commune mesure.

9. Mais comme il faut toujours ajouter la ligne B à elle-même, ou prendre sur une ligne indéfinie tous les multiples de B, il est bien plus clair et plus simple de représenter la ligne B par une ligne fermée rentrante sur elle-même, telle, par exemple, que la circonférence d'un cercle; ou, si B marque un nombre, de le représenter par B points rangés régulièrement sur cette circonférence; alors on trouve sur la même figure finie, l'infinité des multiples de cette ligne, ou de ce nombre, en faisant toujours le tour du même cercle. Ainsi l'on portera la longueur ou le nombre A sur la circonférence B, à partir d'un point quelconque, jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ; alors on aura fait un certain nombre m de fois le tour de la circonférence, et l'on aura le plus petit multiple mB qu'on puisse mesurer par la grandeur A; et par conséquent, on aura $\frac{A}{m}$ pour la plus grande commune mesure de A et B.

De cette manière, l'opération est plus simple que l'opération ordinaire; car, suivant le procédé connu, il faut porter A sur B, et puis le reste r sur A, et puis le nouveau reste r' sur le précédent r, et puis r'' sur r', et ainsi de suite; mais ici vous portez toujours la même grandeur A sur la même grandeur B, rentrante en elle-même, jusqu'à ce que vous retombiez au point de départ, ce qui ne fait qu'une seule et même opération. Il ne s'agit donc que de compter combien de fois vous avez fait le tour de B, et, si ce nombre est m, la $m^{ième}$ partie de A est la plus grande commune mesure. Si l'opération n'a pas de fin, les deux grandeurs sont *incommensurables*.

Mais je passe à d'autres propriétés des nombres, toujours déduites de la simple considération de l'ordre.

10. Et d'abord, ce théorème d'Euclide, rappelé au n° **6** du chapitre précédent, peut se voir de la manière la plus évidente.

Car soient toujours nos N points rangés en cercle dans l'ordre a, b, c, d, e, etc.; si, à partir de l'un d'eux, vous prenez ces points en les joignant de α en α, α étant un nombre inférieur et premier à N, vous passerez, comme on l'a dit, par tous les autres, et vous formerez ainsi un nouveau polygone régulier de N côtés. Actuellement, si dans ce nouveau polygone vous prenez les points de β en β, β étant aussi pre-

mier à N, vous aurez un troisième polygone de N côtés. Or il est évident que prendre d'abord les sommets de α en α, et ensuite, dans le polygone qui en résulte, les prendre de β en β, revient au même que de prendre tout d'un coup les sommets de $\alpha\beta$ en $\alpha\beta$ dans le premier polygone qu'on a considéré. Donc, puisqu'en prenant de $\alpha\beta$ en $\alpha\beta$, on passe par tous les N points, il s'ensuit, n° **2**, que le produit $\alpha\beta$ est un nombre premier à N. On a donc ce principe fondamental dans la théorie des nombres : *Si deux nombres α et β sont premiers à un troisième nombre* N, *leur produit $\alpha\beta$ est aussi premier à ce troisième.* D'où l'on peut tirer cette suite de conséquences :

Que tant de nombres qu'on voudra, premiers à un autre nombre N, donnent leur produit aussi premier par rapport à ce nombre N;

Que α étant premier à N, toutes les puissances α^2, α^3, α^4, etc., sont aussi premières à N;

Qu'un nombre quelconque N ne peut se résoudre que d'une seule manière en facteurs premiers;

Que les racines des puissances imparfaites ne peuvent être exprimées par des fractions, et que, par conséquent, elles sont incommensurables avec l'unité; etc., etc.

11. Le théorème général d'Euler, exprimé par l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\mathrm{N},$$

où n marque combien il y a de nombres inférieurs et premiers à N, et $\mathfrak{M}$N un multiple quelconque de N, peut aussi se démontrer d'une manière simple et lumineuse par cette même considération de l'ordre.

Car soient N points a, b, c, d, e, f, g, etc., ω, rangés en cercle et formant ainsi les sommets d'un polygone régulier de N côtés, et supposons que x désigne un nombre quelconque inférieur et premier à N. Prenez ces sommets à partir de l'un quelconque d'entre eux, en les joignant de x en x, ce qui vous donnera un second polygone régulier de N côtés. De ce second polygone tirez-en un troisième, en y prenant encore les lettres de x en x; et de celui-ci, par la même loi, un quatrième, et ainsi de suite, jusqu'à ce que vous retombiez sur le premier polygone d'où vous êtes parti; vous aurez formé ainsi un certain nombre n' de polygones tous différents. Or, ou ces polygones feront

tous ceux qu'on peut former en joignant les sommets par tous les intervalles possibles inférieurs et premiers à **N**, et alors on aura

$$n' = n;$$

ou bien ils n'en feront qu'une partie, et alors je dis que cette partie sera une aliquote de n, de sorte qu'on aura

$$n'\theta = n.$$

En effet, prenez un des n polygones qui n'existe pas dans le groupe des n' polygones différents que vous avez formés, et tirez-en, par la même loi que tout à l'heure, n' polygones réguliers; il est clair d'abord qu'ils seront tous différents entre eux; et ensuite, il est aisé de voir qu'ils seront tous différents des premiers, car si un seul polygone de ce second groupe pouvait revenir à l'un de ceux qui sont dans le premier, comme on déduit toujours par la même loi, le groupe entier reviendrait nécessairement au premier, ce qui est impossible puisqu'on y part d'un polygone qui n'est point dans le premier groupe par hypothèse. On démontrera de même, s'il reste encore d'autres polygones réguliers, qu'il y en aura n' nouveaux, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'en reste plus. Et comme il n'y a en tout que n polygones différents de **N** côtés, il en résulte que le nombre n' de ceux qu'on assemble en prenant les sommets de x en x est nécessairement une partie aliquote du nombre n.

12. Or, il est évident que si dans un polygone on prend les sommets de x en x, et que dans le polygone qui en résulte, on prenne encore de x en x, et ainsi de suite, ce procédé revient au même que que si l'on tirait directement tous les polygones du seul premier, mais en y prenant les sommets : 1° de x en x; 2° de x^2 en x^2; 3° de x^3 en x^3, etc., et enfin de $x^{n'}$ en $x^{n'}$. Mais, par hypothèse, en prenant les sommets de $x^{n'}$ en $x^{n'}$, on retombe sur le polygone même d'où l'on est parti comme si l'on y eût pris simplement les sommets de 1 en 1; donc l'intervalle $x^{n'}$ par lequel on saute d'un point à l'autre, revient à l'unité relativement au nombre **N**, c'est-à-dire est égal à 1 plus un multiple de **N**; de sorte que l'on a

$$x^{n'} = 1 - \mathfrak{M}\mathbf{N}.$$

Or, puisque x^n revient à l'unité, il est évident qu'une puissance quelconque de $x^{n'}$ revient aussi à l'unité; donc $(x^{n'})^\theta$, ou x^n, revient à 1 relativement à N, c'est-à-dire qu'on a toujours l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\mathrm{N},$$

quel que soit le nombre entier x premier à N; *ce qu'il fallait démontrer.*

Ainsi l'on a de ce beau théorème une démonstration puisée dans les premiers principes de la chose, et rendue, pour ainsi dire, sensible par la considération des divers polygones réguliers d'un même nombre de côtés. Cette idée simple de passer, par la même loi, d'un polygone à l'autre, en y marchant toujours par le même intervalle, nous mène directement à l'idée des *puissances*, des *résidus*, des *multiples racines* de l'unité, etc. D'où il paraît, comme je l'ai déjà remarqué dans d'autres Mémoires, que la théorie de l'ordre est la source naturelle des propriétés des nombres, et des principes fondamentaux de l'analyse : vérités qui recevront sans cesse un plus grand jour.

13. En attendant, nous pouvons encore démontrer de la même manière que si a, b, c, d, etc., $\mathrm{N} - 1$ sont les n nombres inférieurs et premiers à un nombre quelconque N, l'un ou l'autre des deux nombres

$$1.a.b.c.d\,\text{etc.}\,\overline{\mathrm{N} - 1} \pm 1$$

est toujours divisible par N.

En effet, soient N lettres rangées en cercle et marquant les angles d'un polygone régulier de N côtés. Prenez les angles de a en a, et comme a est premier à N, vous formerez un second polygone régulier de N côtés. Actuellement, dans ce second polygone, il est évident que vous pouvez prendre les lettres de x en x, de manière à retomber sur le premier polygone; mais, par ces deux opérations, vous aurez pris les lettres de ax en ax; donc, puisque vous retombez sur le premier polygone, prendre les lettres de ax en ax revient à les prendre de 1 en 1.

Donc, si a est premier à N, il y a toujours un autre nombre x aussi premier à N et qui est tel que

$$ax = \mathfrak{M}\mathrm{N} + 1.$$

14. Mais il peut arriver que le nombre x soit encore le même que a, alors on aurait

$$a^2 = \mathfrak{M}\mathrm{N} + 1.$$

Dans ce cas, prenez les lettres de a en a, comme ci-dessus; mais dans le second polygone qui en résulte, au lieu de les prendre encore de a en a pour retomber sur le premier, prenez de $\mathrm{N} - a$ en $\mathrm{N} - a$, et vous retomberez sur le premier polygone *renversé*, et par conséquent, vous aurez le produit $a(\mathrm{N} - a)$ qui reviendra à -1, c'est-à-dire qu'on aura

$$a \times \overline{\mathrm{N} - a} = \mathfrak{M}\mathrm{N} - 1.$$

Donc, dans tous les cas, les nombres

$$1,\ a,\ b,\ c,\ d,\ \text{etc.},\ \mathrm{N} - 1$$

peuvent toujours s'associer deux à deux de manière que leur produit revienne à ± 1; donc aussi le produit total $a.b.c.d$ etc. $\mathrm{N} - 1$ reviendra nécessairement à ± 1, c'est-à-dire sera de la forme $\mathfrak{M}\mathrm{N} \pm 1$; *ce qu'il fallait démontrer.*

15. Quand N est un nombre premier p ou une puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre premier p supérieur à 2, vous ne pouvez jamais trouver que les nombres 1 et $\mathrm{N} - 1$ qui soient tels que leurs carrés reviennent à l'unité; sans quoi vous auriez

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

divisible de plus de deux manières par p ou p^m, ce qui ne se peut, puisque, $x + 1$ et $x - 1$ ne pouvant avoir au plus que le commun diviseur 2, vous ne pouvez rendre le produit de ces binômes divisible par p ou p^m qu'en faisant, ou $x + 1 = \mathfrak{M}\mathrm{N}$, ou $x - 1 = \mathfrak{M}\mathrm{N}$, ce qui ne peut donner que deux valeurs de x au-dessous de N : ainsi, quand $\mathrm{N} = p$ ou p^m, on a l'équation

$$a.b.c.d... = \mathfrak{M}\mathrm{N} + 1,$$

puisque ces nombres a, b, c, etc., s'associent toujours deux à deux, de manière que le produit revient à $+1$; donc, en multipliant par 1 et

$N - 1$, on aura

$$1.a.b.c.d\ldots \overline{N-1} = \mathfrak{M}N - 1,$$

ou

$$1.a.b.c.d\ldots \overline{N-1} + 1 = \mathfrak{M}N.$$

On ferait voir la même chose pour le cas de $N = 2p^m$ (p étant > 2).

Solutions nouvelles de l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues.

16. De cette même considération de l'ordre on peut tirer une solution nouvelle, et en quelque sorte *géométrique,* de l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues x et y. Cette solution n'est, en effet, qu'un corollaire de la proposition énoncée plus haut à la fin du n° **13**, mais il n'est pas inutile d'en présenter ici la démonstration expresse.

La forme générale de l'équation indéterminée dont il s'agit est, comme on sait,

$$Lx - My = N,$$

où l'on doit supposer les deux coefficients L et M premiers entre eux; car s'ils avaient un commun diviseur θ autre que l'unité, il faudrait que N fût aussi divisible par θ, sans quoi l'équation serait évidemment impossible en nombres entiers x et y. Si donc l'équation est possible, le plus grand commun diviseur des deux coefficients de x et y divise toute l'équation; de sorte qu'en le supprimant, on a une autre équation équivalente où les nouveaux coefficients L et M sont premiers entre eux. Il suffit même de résoudre la simple équation

$$Lx - My = 1,$$

parce que si l'on en trouve les racines x et y, on n'aura qu'à les multiplier par N, ce qui donnera Nx et Ny pour les racines de la proposée.

Première solution.

17. Soit donc à résoudre l'équation indéterminée

$$Lx - My = 1,$$

et supposons, par exemple, qu'on veuille avoir d'abord la valeur de x.

Je prends une suite de points

$$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g \ldots\ \omega,$$

en nombre M coefficient de l'autre inconnue y; et, à partir du premier point a, je joins ces points, non pas de suite, mais en sautant de l'un à l'autre par l'intervalle constant L qui est le coefficient de x; et comme L est premier à M par hypothèse, je passe nécessairement par tous les points avant de retomber sur le point de départ, et je forme ainsi un nouvel ordre ou polygone du même nombre M de sommets. Or, si dans ce nouvel ordre je joignais les points en allant de l'un à l'autre par l'intervalle λ qui y sépare a de b, il est clair que je retomberais sur le premier ordre $a\ b\ c\ d\ e\ f \ldots$, comme si dans ce premier ordre j'avais pris simplement les points de suite ou de 1 en 1. Donc, puisque la double opération d'aller de L en L dans le premier ordre, et puis de λ en λ dans le second, revient à marcher tout d'un coup de $L\lambda$ en $L\lambda$, le produit $L\lambda$ revient à l'unité relativement au nombre M, c'est-à-dire qu'on a

$$L\lambda = 1 \textit{ plus un certain multiple de } M,$$

et par conséquent

$$x = \lambda$$

pour la plus petite valeur de x qui satisfasse à la proposée; et de là on tirerait sur-le-champ

$$y = \frac{L\lambda - 1}{M} = \mu$$

pour la plus petite valeur μ de y, conjuguée à cette valeur λ de x.

Au reste, il est clair qu'on pourrait trouver la valeur de y aussi directement que celle de x, en considérant un polygone de L sommets $a\ b\ c\ d \ldots\ \omega$, et les joignant de M en M coefficient de y; ce qui donnerait un nouvel ordre de ces L sommets. Car, dans ce nouvel ordre, si l'on prenait l'intervalle μ qui y sépare a, non pas de b qui suivait a dans l'ordre primitif, mais de ω qui l'y précédait, il est clair qu'on retomberait sur le polygone renversé $a\ \omega \ldots\ e\ d\ c\ b$, comme si l'on avait marché de -1 en -1 dans l'ordre primitif. Donc μ sera la plus

petite valeur de y qui résoudrait l'équation

$$My - Lx = -1,$$

et par conséquent l'équation

$$Lx - My = 1,$$

qui est la proposée même.

Connaissant les deux plus petits nombres λ et μ qui satisfont ensemble à la proposée, on aura, pour toutes les autres valeurs possibles de x et y qui jouissent de la même propriété,

$$x = \lambda + iM,$$
$$y = \mu + iL;$$

i étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, mais qu'on doit toujours prendre le même dans les deux expressions.

Exemple.

18. Pour éclaircir la règle par une application très-simple, soit, par exemple, à résoudre l'équation indéterminée

$$12x - 7y = 1;$$

je prends 7 points dans l'ordre

$$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g,$$

et de cet ordre, en y allant de 12 en 12, ou, ce qui revient au même, de 5 en 5 (à cause de $12 = 5$ à un multiple près de 7), je tire l'ordre nouveau

$$a\ f\ d\ b\ g\ e\ c.$$

où je vois que l'intervalle qui sépare a de b est 3; que par conséquent le plus petit nombre x qui satisfait à la proposée est $x = 3$: et de là, par la proposée même, je tirerais tout de suite $y = 5$ pour la plus petite valeur de y conjuguée à la valeur de x.

Si l'on avait voulu trouver directement y, on aurait pris une suite de points

$$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ k\ l\ m.$$

au nombre de 12, coefficient de l'autre inconnue x; et, les joignant de 7 en 7, on aurait trouvé l'ordre nouveau

$$a\ h\ c\ k\ e\ m\ g\ b\ i\ d\ l\ f,$$

où l'on voit que la distance qui sépare a, non pas de b qui le suivait dans l'ordre primitif, mais bien de m qui l'y précédait, est égale au nombre 5 : d'où résulte $y = 5$ pour la plus petite valeur de y qui résoudrait l'équation

$$7y - 12x = -1,$$

ou, en changeant les signes,

$$12x - 7y = 1,$$

qui est la proposée même.

On peut faire d'autres exemples, et l'on trouvera que la méthode est assez prompte, pourvu qu'un des deux coefficients L et M soit un nombre peu considérable. Car, en se bornant alors à ne chercher, par cette voie, que l'inconnue affectée du grand coefficient, on n'aura besoin de marquer des points $a, b, c, \ldots, \omega$, qu'en nombre égal au plus petit, ce qui fera connaître la première inconnue; après quoi l'on pourra tirer l'autre de l'équation même. Mais si les coefficients étaient tous deux un peu grands, il faudrait ranger par ordre beaucoup de points $a, b, c, d, e, \ldots, \omega$, ce qui serait long et fastidieux, ou même impraticable. Toutefois la solution n'en est pas moins curieuse dans la théorie, par les rapprochements qu'on en peut faire avec les solutions arithmétiques déjà connues.

Seconde solution.

19. Au reste, on peut encore déduire du théorème donné au n° **11**, une nouvelle solution de l'équation indéterminée

$$Lx - My = 1.$$

Car, dans le polygone de M côtés, joignez les sommets de L en L, ce qui donne un deuxième polygone : dans celui-ci, joignez encore de L en L, ce qui donnera un troisième polygone; et continuez ainsi jusqu'à l'opération $m^{\text{ième}}$ qui vous fera retomber sur le polygone primitif.

Comme le résultat de ces m opérations sera le même que si vous aviez marché tout d'un coup de L^m en L^m, il s'ensuit que l'intervalle L^m revient à l'unité relativement à M. Donc, pour trouver x, au lieu d'écrire que Lx doit revenir à 1, vous pouvez écrire que Lx doit revenir à L^m, et alors il est évident que x revient à L^{m-1}.

Ainsi la plus petite valeur de x peut se trouver en formant le $m-1^{ième}$ polygone dérivé, y prenant deux sommets consécutifs, et regardant à quelle distance ces deux sommets se trouvent l'un de l'autre dans le polygone primitif; cette distance sera le nombre cherché x.

Voilà donc, en apparence, une seconde solution géométrique de l'équation indéterminée

$$Lx - My = 1;$$

mais il est aisé de voir que cette solution abrégée comme elle peut l'être ne diffère point de celle qu'on a donnée plus haut. Car ici le polygone primitif pouvant être regardé comme étant le $m^{ième}$ dérivé, et par conséquent comme celui qui vient après le $m - 1^{ième}$, il est clair que les deux polygones qu'on emploie ici pour avoir x sont deux polygones dérivés *consécutifs*. Or, puisque tous nos polygones naissent l'un de l'autre par la même loi, on peut employer de même deux autres polygones consécutifs *quelconques*, tels que le premier et le second: ce qui nous ramène précisément à la solution géométrique du n° **17**.

20. Mais, en arithmétique, l'expression

$$x = L^{m-1}$$

nous donne cette règle nouvelle pour trouver x : *Faites les puissances successives* L, L^2, L^3, *etc., en rabaissant à mesure au-dessous de* M *par la division,* et continuez ainsi jusqu'à ce que vous trouviez le reste 1; le reste précédent sera la plus petite valeur de x qui résout la proposée

$$Lx - My = 1.$$

Quant à cette puissance m jusqu'à laquelle il faudra monter pour obtenir $L^m = 1$, elle dépend des nombres M et L. Si l'on désigne par μ le nombre qui marque combien il y a de nombres L inférieurs et premiers à M, on peut dire, en général, que m sera toujours une

aliquote du nombre μ, et cette aliquote ne pourra s'élever jusqu'au nombre μ lui-même que dans le cas où M serait un nombre premier, ou une puissance de nombre premier, ou le double d'une telle puissance; et, même dans ces cas, on n'aura $m = \mu$ que pour autant de nombres L qu'il y aura de nombres inférieurs et premiers à μ. Dans tous les autres cas, m sera inférieur à μ; il en sera tel ou tel sous-multiple, suivant la nature du nombre L comparé au module M.

On trouverait de même, pour l'expression directe de l'autre inconnue y,

$$y = -(M^{l-1}),$$

l étant la puissance de M qui donnera $M^l = 1$, relativement au module L; etc., etc.

CHAPITRE IV.

Théorie des équations binômes.

Je reviens ici à la théorie des équations binômes, et je vais chercher les propriétés de leurs racines par la forme même de ces équations.

Article Ier.

Des équations binômes rapportées à un module premier p.

1. Soit l'équation binôme indéterminée $x^n - 1 = \mathfrak{M}p$, et désignons par r une quelconque des racines de cette équation.

Je dis d'abord qu'*on ne peut avoir en même temps*

$$r^n = 1 + \mathfrak{M}p, \quad \textit{et} \quad r^h = 1 + \mathfrak{M}p,$$

à moins qu'on n'ait aussi

$$r^\theta = 1 + \mathfrak{M}p,$$

θ étant le plus grand commun diviseur de n et h.

Car soit i le reste de la division de n par h, de manière qu'on ait

$$n = hq + i,$$

il est clair que des deux équations supposées, on tirerait

$$r^i = 1 + \mathfrak{M}p;$$

et, en effet, la première pourrait se mettre sous la forme

$$r^{hq+i} = 1 + \mathfrak{M}p, \quad \text{ou} \quad (r^h)^q \times r^i = 1 + \mathfrak{M}p;$$

mais, à cause de la seconde équation

$$r^h = 1 + \mathfrak{M}p,$$

le facteur $(r^h)^q$ revient à $1 + \mathfrak{M}p$; donc l'équation

$$(r^h)^q \times r^i = 1 + \mathfrak{M}p$$

reviendrait à

$$r^i = 1 + \mathfrak{M}p.$$

Mais, pareillement, des deux équations

$$r^h = 1 + \mathfrak{M}p, \quad \text{et} \quad r^i = 1 + \mathfrak{M}p,$$

on tirerait

$$r^{i'} = 1 + \mathfrak{M}p,$$

i' étant le reste de la division de h par i, et ainsi de suite : d'où il résulte qu'on aurait enfin

$$r^\theta = 1 + \mathfrak{M}p,$$

θ étant le plus grand commun diviseur de n et h.

Cette démonstration est tout à fait la même que celle qu'on ferait pour prouver que les deux binômes $x^n - 1$ et $x^h - 1$ ne peuvent avoir de commun diviseur plus élevé que le binôme $x^\theta - 1$, θ étant le plus grand commun diviseur de n et h.

2. Si n et h sont premiers entre eux, c'est-à-dire si $\theta = 1$, les deux équations

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}p, \quad \text{et} \quad x^h - 1 = \mathfrak{M}p,$$

ne peuvent avoir d'autre racine commune que l'unité.

Mais, en vertu du théorème de Fermat, l'équation

$$x^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}p$$

a toujours $p - 1$ racines entières inférieures à p, et ces racines font ainsi tous les nombres de la suite naturelle $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, p - 1$. Donc aucune équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p$$

ne peut avoir de racines entières autres que l'unité, à moins qu'il n'y ait entre n et $p - 1$ un commun diviseur θ autre que l'unité.

3. Si n est premier à $p - 1$, $x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p$ n'a donc aucune autre racine réelle que l'unité.

Si entre n et $p - 1$, il y a le plus grand commun diviseur $\theta > 1$, $x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p$ aura nécessairement, parmi les nombres $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, p - 1$, θ racines réelles. Car le binôme $x^\theta - 1$ sera un diviseur rationnel de $x^{p-1} - 1$, et par conséquent sera divisible par p pour θ valeurs de x inférieures à p.

Lors donc que l'on considère une équation binôme indéterminée

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

il n'y a pas d'autres racines réelles à chercher que celles qui conviennent à

$$x^\theta - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

θ étant le plus grand commun diviseur de n et $p - 1$. Il est donc inutile de considérer d'autres équations

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

que celles où l'exposant n est un diviseur de $p - 1$.

Si, par exemple, on proposait les équations

$$x^3 - 1 = \mathfrak{M}\, 13, \quad x^{10} - 1 = \mathfrak{M}\, 13, \quad x^{12} - 1 = \mathfrak{M}\, 13, \quad \text{etc.},$$

cela reviendrait à proposer les équations respectives

$$x - 1 = \mathfrak{M}\, 13, \quad x^2 - 1 = \mathfrak{M}\, 13, \quad x^3 - 1 = \mathfrak{M}\, 13, \quad \text{etc.},$$

car ces dernières renferment les seules racines entières que puissent avoir les équations données.

4. Considérez les puissances successives r, r^2, r^3, r^4, etc., de l'une

quelconque des racines r de l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}p;$$

il est clair, par la forme même de l'équation, que toutes ces puissances en seront aussi des racines : car si

$$r^n = 1 + \mathfrak{M}p,$$

on aura aussi

$$(r^2)^n, \quad \text{ou} \quad (r^n)^2 = 1 + \mathfrak{M}p; \qquad (r^3)^n, \quad \text{ou} \quad (r^n)^3 = 1 + \mathfrak{M}p;$$

et, en général,

$$r^{en}, \quad \text{ou} \quad (r^n)^e = 1 + \mathfrak{M}p.$$

Or, actuellement, je dis que deux quelconques de ces puissances r^e, $r^{e'}$ ne pourront être équivalentes, c'est-à-dire donner un même reste relativement à p, à moins que la racine r qu'on aura employée ne soit en même temps racine d'une équation inférieure

$$x^d - 1 = \mathfrak{M}p,$$

d étant un diviseur de l'exposant n.

Et, en effet, soit $e > e'$, e et e' étant d'ailleurs au-dessous de n. Si l'on avait

$$r^e - r^{e'} = \mathfrak{M}p,$$

on en tirerait

$$r^{e'}(r^{e-e'} - 1) = \mathfrak{M}p;$$

mais le facteur $r^{e'}$ n'étant pas divisible par p, puisque r est premier à p, il faudrait que l'autre facteur $r^{e-e'} - 1$ fût divisible par p, et partant, qu'on eût, en faisant $e - e' = h$,

$$r^h - 1 = \mathfrak{M}p;$$

mais cette équation ne peut avoir lieu en même temps que la proposée, à moins que h n'ait un commun diviseur d avec n, et par conséquent à moins que r ne soit une racine de l'équation binôme de degré inférieur

$$x^d - 1 = \mathfrak{M}p.$$

Article II.

Des racines primitives de l'équation $x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p$.

5. Imaginez donc qu'on prenne pour r une racine de

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

mais qui n'appartienne pas en même temps à une autre équation binôme

$$x^d - 1 = \mathfrak{M}\, p$$

de degré inférieur d, diviseur de n; alors toutes les puissances r, r^2, r^3, $r^4, \ldots, r^n$, de cette racine r, seront différentes relativement à p, et par conséquent cette racine r sera propre à former par ses puissances successives la suite complète de toutes les racines de la proposée. Ce sera ce qu'on peut appeler une *racine primitive* de l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

c'est-à-dire une racine uniquement propre à cette équation.

Si l'exposant n est un nombre premier, on voit tout de suite que cette racine primitive existe, et même que toutes les racines de

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

autres que l'unité, sont des racines primitives : car aucune d'elles ne peut appartenir à aucune équation inférieure

$$x^d - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

puisque n, étant premier, ne peut avoir d'autre diviseur d que l'unité.

6. Ainsi, quand n est un nombre premier, toutes les racines de

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

autres que l'unité, sont uniquement propres à cette équation, c'est-à-dire ne résolvent aucune équation binôme de degré inférieur à n; chacune d'elles, par ses puissances successives 1, 2, 3, 4, 5, 6,..., n, fournit la suite complète de toutes les racines différentes de la proposée; elle ne donne l'unité qu'à la puissance $n^{ième}$; après quoi toutes les racines reparaissent périodiquement dans le même ordre à l'infini.

Mais quand l'exposant n est un nombre composé, il n'y a plus qu'une partie des racines qui soient uniquement propres à l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

ou qui en soient des racines primitives; car les autres résolvent en même temps des équations binômes de degrés inférieurs marqués par les différents diviseurs de n; de sorte que leurs puissances successives ramènent l'unité avant la puissance $n^{ième}$, et ne peuvent ainsi former la suite complète des n racines différentes de la proposée.

De l'existence des racines primitives et de leur nombre.

7. Voyons donc d'abord si l'équation $x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p$ a toujours des racines primitives, quel que soit le nombre n, et combien il y a de ces racines.

Nous avons déjà remarqué que, pour un exposant a premier, il y a $a - 1$ racines primitives; et, en effet, l'exposant a n'ayant pas d'autre diviseur que l'unité, le binôme $x^a - 1$ n'a pas d'autre diviseur binôme de degré inférieur, que le binôme $x - 1$. Ainsi toutes les racines de

$$x^a - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

excepté la racine $x = 1$, sont uniquement propres à cette équation, et, comme on l'a dit, en sont des racines primitives.

Si l'on a $n = a^2$, a étant toujours un nombre premier, l'exposant n n'a pas au-dessous de lui de plus grand diviseur que a, et par conséquent, le binôme $x^{a^2} - 1$ n'a pas, au-dessous de lui, de diviseur binôme plus élevé que $x^a - 1$. En rejetant donc de la proposée les a racines de l'équation

$$x^a - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

il en restera $a^2 - a$ qui seront uniquement propres à l'équation

$$x^{a^2} - 1 = \mathfrak{M}\, p.$$

Si l'on a $n = a^3$, on trouvera de même qu'en rejetant les a^2 racines de l'équation

$$x^{a^2} - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

on aura rejeté toutes celles qui peuvent résoudre les équations binômes de degrés inférieurs, et que, par conséquent, il en reste $a^3 - a^2$ qui sont uniquement propres à la proposée

$$x^{a^3} - 1 = \mathfrak{M}\, p.$$

En général, soit $n = a^\alpha$, et par conséquent

$$x^{a^\alpha} - 1 = \mathfrak{M}\, p$$

l'équation proposée. Si l'on rejette les racines de l'équation binôme

$$x^{a^{\alpha-1}} - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

on aura rejeté toutes celles qui résolvent, en même temps que la proposée, des équations binômes de degrés inférieurs; et, par conséquent, les racines restantes, qui seront au nombre de $a^\alpha - a^{\alpha-1}$, seront toutes des racines primitives.

Ainsi, pour un exposant n qui est une puissance quelconque α d'un nombre premier a, l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p$$

a toujours des racines primitives; et le nombre en est

$$a^\alpha - a^{\alpha-1}, \quad \text{ou} \quad a^{\alpha-1}(a-1),$$

c'est-à-dire qu'il y en a autant que de nombres inférieurs et premiers à n (n° 7, chap. II).

8. Ce théorème est général pour un nombre quelconque n; et d'abord il serait bien facile de le reconnaître pour le cas de $n = a^\alpha b^\beta$, a et b étant deux nombres premiers quelconques. Car de l'équation

$$x^{a^\alpha b^\beta} - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

qui a un nombre $a^\alpha b^\beta$ de racines, imaginez qu'on rejette les $a^{\alpha-1} b^\beta$ racines de l'équation inférieure

$$x^{a^{\alpha-1} b^\beta} - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

et puis les $a^\alpha b^{\beta-1}$ racines de l'équation inférieure

$$x^{a^\alpha b^{\beta-1}} - 1 = \mathfrak{M}\, p;$$

il est évident qu'on aura rejeté toutes les racines qui peuvent résoudre des équations binômes de degrés inférieurs à la proposée et diviseurs de n. Ainsi l'on trouverait d'abord qu'il doit rester

$$a^{\alpha-1}b^{\beta-1}(a-1)(b-1)$$

racines; mais ce nombre est trop faible: car, par la double opération précédente, il est clair qu'on a ôté deux fois les racines communes aux deux équations

$$x^{a^{\alpha-1}b^{\beta-1}}-1\equiv \mathfrak{M}p,\quad x^{a^{\alpha-1}b^{\beta-1}(a-1)(b-1)}-1\equiv \mathfrak{M}p,$$

racines communes qui sont au nombre de $a^{\alpha-1}b^{\beta-1}$; donc, au résultat précédent, il faut ajouter $a^{\alpha-1}b^{\beta-1}$, et l'on trouve ainsi, pour le nombre des racines qui appartiennent uniquement à la proposée,

$$a^{\alpha-1}b^{\beta-1}(a-1)(b-1)+a^{\alpha-1}b^{\beta-1}=a^{\alpha-1}b^{\beta-1}(ab-1),$$

ce qui se réduit à

$$a^{\alpha-1}b^{\beta-1}(a-1)(b-1);$$

d'où l'on voit qu'il y a encore autant de racines primitives que de nombres inférieurs et premiers à n.

La même démonstration pourrait s'étendre au cas de $n=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$; mais nous allons présenter la chose d'une manière plus claire, et qui peut même servir à trouver les racines primitives.

9. Soit donc, en général, $n=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$ et l'équation binôme

$$x^{a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\ldots}-1\equiv \mathfrak{M}p.$$

Je considère les équations

$$x^{a^{\alpha-1}}-1\equiv \mathfrak{M}p,\quad x^{b^{\beta-1}}-1\equiv \mathfrak{M}p,\quad x^{c^{\gamma-1}}-1\equiv \mathfrak{M}p,\ldots,$$

et je suppose que x' soit une racine primitive de la première, x'' une racine primitive de la seconde, x''' une racine primitive de la troisième, etc.; alors je dis que le produit $x'x''x'''\ldots$ est une racine primitive de la proposée. En effet, il est clair, en premier lieu, que ce produit est racine de l'équation

$$x^{n}-1\equiv \mathfrak{M}p;$$

c'est-à-dire qu'étant élevé à la puissance $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, il donne $1 + \mathfrak{M} p$, ou simplement 1, en négligeant les multiples de p. Mais, en second lieu, il est aisé de voir qu'il ne peut donner l'unité pour aucune puissance d inférieure à n: car si l'on avait

$$x' x'' x''' \ldots^d = 1 + \mathfrak{M} p.$$

l'exposant d serait nécessairement diviseur de n (n° 4); mais d étant plus petit que n, il y a au moins quelque facteur simple de n, tel que a, je suppose, qui entre une fois de moins dans le nombre d que dans le nombre n; ainsi d serait diviseur de $a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots$; donc, puisque $x' x'' x''' \ldots$ élevé à la puissance d donne 1, ce même produit à la puissance $a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots$ qui est multiple de d, donnerait aussi 1; donc on aurait

$$x' x'' x''' \ldots^{a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots} = 1 + \mathfrak{M} p:$$

mais, à cause de

$$x''^{b^\beta} = 1 + \mathfrak{M} p, \quad x'''^{c^\gamma} = 1 + \mathfrak{M} p, \quad \text{etc.},$$

cette équation se réduit à

$$x'^{a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots} = 1 + \mathfrak{M} p:$$

or, par hypothèse, on a

$$x'^{a^\alpha} = 1 + \mathfrak{M} p:$$

donc on aurait aussi, en prenant le commun diviseur $a^{\alpha-1}$ des deux exposants de ces équations (n° **3**),

$$x'^{a^{\alpha-1}} = 1 + \mathfrak{M} p:$$

donc x' donnerait l'unité avant la puissance a^α, et partant, ne serait pas racine primitive de l'équation

$$x^{a^\alpha} - 1 = \mathfrak{M} p.$$

ce qui est contre l'hypothèse.

Donc le produit $x' x'' x''' \ldots$ ne peut donner l'unité pour aucune puissance d inférieure à $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$; donc il est racine primitive de l'équation proposée

$$x^{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots} - 1 = \mathfrak{M} p.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi donc, toute équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p$$

a des racines primitives, et le nombre en est au moins égal à celui de tous les produits différents $x' x'' x'''$... qu'on peut faire en combinant les racines primitives x', x'', x''',... des équations respectives

$$x^{a^\alpha} - 1 = \mathfrak{M}\, p, \quad x^{b^\beta} - 1 = \mathfrak{M}\, p, \quad x^{c^\gamma} - 1 = \mathfrak{M}\, p, \quad \text{etc.},$$

or, le nombre des racines primitives x' de la première équation est $a^{\alpha-1}(a-1)$; les racines primitives x'' de la deuxième sont au nombre de $b^{\beta-1}(b-1)$; les racines primitives x''' de la troisième sont au nombre de $c^{\gamma-1}(c-1)$, etc. : donc, par la théorie des combinaisons, les racines primitives de la proposée

$$x^n - 1 = x^{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots} - 1 = \mathfrak{M}\, p$$

sont au moins au nombre de

$$a^{\alpha-1}(a-1).b^{\beta-1}(b-1).c^{\gamma-1}(c-1)\ldots.$$

c'est-à-dire qu'il y en a au moins autant que de nombres inférieurs et premiers à n; et il est bien aisé de voir qu'il n'y en a pas davantage.

10. Au reste, dès qu'on suppose l'existence d'une seule racine primitive de

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

on peut démontrer tout de suite qu'il y en a précisément le nombre qu'on vient de dire. Car, soit r cette racine primitive, et formez la suite des puissances

$$r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ r^5,\ r^6, \ldots,\ r^{n-1},\ r^n;$$

il est clair qu'on aura la suite complète des n racines différentes de la proposée; or, si l'on considère un nombre quelconque e inférieur et premier à n, et qu'on prenne les racines dans cette même suite, en allant de l'un à l'autre de e en e; comme l'intervalle e par lequel on saute est premier à n, on sera obligé de passer par toutes les racines avant de revenir à la racine r d'où l'on est parti; donc la suite

$$r^e,\ r^{e+2},\ r^{e+3},\ r^{e+4}, \ldots,\ r^{e+n}$$

nous donne aussi, aux multiples près de p, toutes les différentes racines de la proposée : donc r^e est aussi racine primitive.

Donc, si l'on suppose une seule racine primitive r de l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

il s'ensuit qu'il y en a autant que de nombres e inférieurs et premiers à n. Et l'on voit en même temps qu'il n'y en a pas davantage : car si l'on va d'une racine à l'autre, par un intervalle constant h qui ait avec n un commun diviseur $\theta > 1$, on ne passera jamais que par un nombre $\frac{n}{\theta}$ de ces racines; de sorte que r^h ne peut jamais être racine primitive de

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p.$$

Mais il est évident, par la même démonstration, que r^h sera racine primitive de l'équation inférieure

$$x^{\frac{n}{\theta}} - 1 = \mathfrak{M}\, p.$$

11. On voit ici se présenter tout naturellement l'idée et la raison du théorème établi au n° **18** du chapitre II, mais qui paraissait un peu isolé.

En effet, je remarque que de toutes les racines de l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

il n'y en a pas une seule qui ne soit racine primitive, ou de la proposée, ou de quelque autre équation inférieure

$$x^d - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

d étant un diviseur de n. Car prenez au hasard une racine ρ de

$$x^{d} - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

et faites-en les puissances successives $\rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \ldots$ vous tomberez nécessairement sur quelque puissance ρ^d qui vous donnera l'unité relativement à p, et alors ρ sera racine primitive de l'équation

$$x^d - 1 = \mathfrak{M}\, p.$$

De plus, on voit que ρ ne peut être racine primitive d'aucune autre équation semblable d'un degré marqué par un autre diviseur de n.

Or, cette équation

$$x^d - 1 = \mathfrak{M}\, p$$

a autant de racines primitives qu'il y a de nombres inférieurs et premiers à d; donc, si l'on voulait compter combien il y a en tout de nombres inférieurs et premiers à chacun de tous les diviseurs possibles d d'un nombre donné n, sans excepter le diviseur 1 et le nombre n lui-même, on trouverait qu'il y en a autant que l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M} p$$

a de racines, c'est-à-dire précisément n. Ce qui est le théorème dont il s'agit.

12. Mais, réciproquement, de ce dernier théorème, qui est d'ailleurs démontré d'une *manière directe*, on peut conclure l'existence des racines primitives de toute équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M} p.$$

Car, en considérant toutes les racines qui sont au nombre de n, s'il n'y en avait point de primitives, c'est-à-dire qui fussent uniquement propres à cette équation, il faudrait donc qu'elles fussent toutes des racines propres à des équations inférieures

$$x^d - 1 = \mathfrak{M} p$$

dont les degrés seraient les différents diviseurs d de n, le nombre n étant excepté de ces diviseurs. Mais chaque équation

$$x^d - 1 = \mathfrak{M} p$$

ne peut avoir plus de racines primitives qu'il n'y a de nombres inférieurs et premiers à d; donc vous ne pourriez jamais compter plus de racines différentes qu'il n'y a de nombres inférieurs et premiers à chacun des diviseurs de n, le nombre n étant excepté; or cela ferait nécessairement un nombre moindre que n, puisque vous n'en trouveriez que n, en n'omettant aucun diviseur. Donc, puisque l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M} p$$

a n racines, vous ne pouvez pas supposer qu'elles appartiennent toutes à des équations binômes de degrés inférieurs d diviseurs de n; donc il y en a quelques-unes qui appartiennent uniquement à l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M} p.$$

et dès qu'on en suppose une seule, il est clair (n° **10**) qu'il y en a autant que de nombres inférieurs et premiers à n.

13. On voit donc par là, de la manière la plus simple et la plus lumineuse, que toute équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p$$

a des racines primitives; qu'une quelconque de ces racines étant nommée r, toutes les autres sont exprimées par r^e, $r^{e'}$, $r^{e''}$,..., les exposants e, e', e'',... étant, après l'unité, tous les nombres inférieurs et premiers à n; enfin, que toute puissance r^h d'exposant h non premier avec n, est simplement une racine primitive de l'équation inférieure

$$x^{\frac{n}{\theta}} - 1 = \mathfrak{M}\, p.$$

θ étant le plus grand commun diviseur de h et n.

14. Si le nombre n diviseur de $p - 1$ est le nombre $p - 1$ lui-même, on a l'équation $x^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}\, p$, qui répond au théorème de Fermat, et dont les racines primitives s'appellent simplement les racines primitives du nombre premier p.

Comme cette équation renferme toutes les équations semblables

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p.$$

où n est une aliquote de $p - 1$, il s'ensuit qu'il suffit de connaître une seule racine primitive de p, non-seulement pour avoir toutes les autres, comme on vient de le voir, mais encore pour avoir les racines primitives des équations

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

d'un degré n diviseur de $p - 1$.

Et, en effet, soit a une racine primitive de

$$x^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}\, p. \quad \text{et faisons} \quad \frac{p-1}{n} = h.$$

il est évident que $r = a^h$ sera une racine primitive de l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p;$$

et de cette racine on conclura toutes les autres.

Article III.

Méthode assez simple pour trouver les racines primitives d'un nombre premier donné.

15. Quant à la manière de trouver les racines primitives d'un nombre premier donné, voici, je crois, la règle la plus simple, et que j'expliquerai d'abord sur un exemple. Supposons qu'il s'agisse, entre autres, du nombre premier $p = 61$.

Comme le nombre inférieur $p - 1$, qui est ici 60, a pour facteurs simples 2, 3 et 5, je remarque que les racines primitives de 61, ou de l'équation

$$x^{60} - 1 = \mathfrak{M}61,$$

ne peuvent être ni des *carrés*, ni des *cubes*, ni des *cinquièmes puissances*. Car, à cause des diviseurs simples 2, 3 et 5 du nombre 60, les carrés étant élevés aux puissances successives 1, 2, 3, 4, etc., ramèneraient l'unité au moins dès la trentième puissance; les cubes la ramèneraient au moins dès la vingtième, et les autres dès la douzième. Ainsi, pour avoir les racines primitives de 61, c'est-à-dire les nombres qui ne peuvent ramener l'unité avant la soixantième puissance, il suffit d'exclure des soixante nombres de la suite naturelle

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \text{etc.},\ 60,$$

tous ceux qui sont des carrés, des cubes et des cinquièmes puissances, ou plutôt des résidus de ces puissances par rapport à 61. Or, au moyen des carrés, on exclut d'abord la *moitié* de tous les nombres; au moyen des cubes de ceux qui restent, on en exclut le *tiers;* et par les cinquièmes puissances de ceux qui restent, on en rejette encore le *cinquième*, et il ne reste plus que les seize racines primitives de 61.

Et il est évident qu'il en serait de même pour un nombre premier quelconque p, en excluant des $p - 1$ nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., $p - 1$, les puissances marquées par les facteurs simples 2, a, b, c, etc., du nombre composé $p - 1$. D'où l'on voit encore pourquoi il y a précisément autant de ces racines primitives qu'il y a de nombres inférieurs et premiers à $p - 1$.

Cette règle nous paraît facile, et, dans l'application, on peut diriger

le calcul de manière à ne pas faire plus d'opérations qu'il n'y a de nombres à exclure.

16. Soit, par exemple, à trouver les racines primitives du nombre premier 31.

On voit d'abord qu'il suffit de faire les quinze carrés des nombres 1, 2, 3, 4, etc., 15 : car les autres reviendraient à ceux de -1, -2, -3, etc., -15, qui donneraient les mêmes carrés.

Supprimant donc dans la suite des trente nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc., 30, les quinze nombres qui sont des carrés, il reste les quinze non carrés, dont il faut faire à présent les cubes.

Mais, comme on ne doit trouver que cinq cubes différents, on peut éviter les opérations inutiles, en rangeant d'abord les quinze non résidus dans l'ordre où ils suivraient une même raison géométrique. Qu'on prenne, par exemple, la raison 2, et les quinze non résidus pourront s'ordonner de cette manière :

3, 6, 12, 24, 17 | 15, 30, 29, 27, 23 | 13, 26, 21, 11, 22,

où ces non-résidus se trouvent distribués en trois groupes de cinq termes en progression géométrique, et dont les cubes sont :

27, 30, 23, 29, 15 | 27, 30, 23, 29, 15 | 27, 30, 23, 29, 15,

c'est-à-dire les mêmes pour chaque groupe.

Il suffit donc de former les cinq cubes des nombres contenus dans un quelconque des trois groupes.

En supprimant ces cubes, il reste pour les nombres qui ne sont ni carrés, ni cubes,

3, 6, 12, 24, 17 | 13, 26, 21, 11, 22.

Si l'on en fait les cinquièmes puissances, on trouve

26, 26, 26, 26, 26 | 6, 6, 6, 6, 6,

c'est-à-dire qu'il suffisait de faire la cinquième puissance d'un terme pris dans le premier groupe, et celle d'un terme pris dans le second. En effaçant ces deux puissances cinquièmes 26 et 6, il reste les huit racines primitives de 31, savoir :

3, 12, 24, 17, 13, 21, 11, 22.

17. Dans les *Nouveaux Commentaires de Saint-Pétersbourg* (tome XVIII), Euler dit, en plusieurs endroits, qu'on ne voit encore aucun moyen de déterminer ces racines; que la démonstration qui prouve, dans tous les cas, leur existence, n'indique pourtant aucune méthode pour les découvrir : et ailleurs, on ne peut, dit-il, saisir entre un nombre premier et les racines primitives qui lui appartiennent, aucune relation d'où l'on puisse déduire au moins *une seule* de ces racines; de sorte que la loi qui règne entre elles paraît aussi profondément cachée que celle qui peut exister entre les nombres premiers eux-mêmes.

Il nous semble que la méthode précédente ne laisse plus rien à désirer à cet égard. Car on ne peut chercher *séparément* aucune de ces racines, puisqu'elles jouissent de propriétés semblables, et qu'on ne peut concevoir aucune méthode qui conduise à l'une plutôt qu'à l'autre. Mais on les trouve toutes à la fois par cette opération arithmétique dont je viens de parler, et à peu près de la même manière qu'on obtiendrait tous les nombres inférieurs et premiers à un nombre donné. Or, il me semble qu'on n'a jamais trouvé qu'il y eût une difficulté particulière à déterminer actuellement ces derniers nombres. Quand on veut les avoir, on considère les facteurs simples du nombre donné; et de la suite naturelle 1, 2, 3, 4, 5, etc., on exclut tous les multiples de ces facteurs simples. Ici, au lieu de ces multiples, il faut exclure toutes les puissances d'exposants marqués par ces mêmes facteurs : c'est, comme on voit, une opération du même genre, mais d'un ordre plus élevé.

Article IV.

Sur l'ordre naturel dans lequel doivent être rangées les racines des équations binômes.

18. Considérons l'équation

$$x^p - 1 = \mathfrak{M}\,\mathrm{P},$$

où l'exposant p est un diviseur de $\mathrm{P} - 1$, les nombres p et P étant tous deux premiers.

Soit r une quelconque des racines de cette équation, autre que l'unité; comme le nombre p est premier, r sera une racine primitive, et par conséquent toutes les racines pourront s'exprimer par

la suite

$$r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ r^5,\ r^6,\ldots,\ r^{p-1}.$$

Mais cet ordre, qui nous paraît naturel, n'est pas le plus simple : on peut ranger ces $p-1$ racines de manière que chacune soit toujours une même puissance de celle qui la précède. Et, en effet, soit a une racine primitive de

$$x^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}\, p;$$

les $p-1$ exposants de r,

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ldots,\ p-1,$$

pourront se ranger dans l'ordre nouveau

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ldots,\ a^{p-1},$$

en négligeant les multiples de p, ce qui est permis, puisque r^p se réduit à 1. On aura donc, pour la représentation des $p-1$ racines de

$$x^p - 1 = \mathfrak{M}\, \mathrm{P},$$

autres que l'unité, cette suite

$$r,\ r^a,\ r^{a^2},\ r^{a^3},\ r^{a^4},\ldots,\ r^{a^{p-2}},$$

qui est la plus simple et la plus naturelle de toutes, puisque toutes les racines y naissent l'une de l'autre par la même puissance : de sorte qu'elles sont exprimées à l'aide d'une seule quelconque d'entre elles et d'un seul et même signe d'opération.

Si vous changez la racine r en une autre quelconque de la suite

$$r,\ r^a,\ r^{a^2},\ r^{a^3},\ldots,$$

il est visible que vos racines se suivront toujours dans le même ordre qu'auparavant. Si vous changez l'exposant a en un autre b qui soit aussi une racine primitive de

$$x^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

comme b ne sera autre chose que a élevée à quelque puissance e première à $p-1$, il est clair que l'ordre nouveau

$$r,\ r^b,\ r^{b^2},\ r^{b^3},\ r^{b^4},\ldots$$

ne sera autre chose que le premier où les racines seraient prises de e en e. Ainsi, soit qu'on change la racine r d'où l'on part, soit qu'on change l'exposant a à l'aide duquel on produit les racines l'une apres l'autre, la disposition mutuelle de ces racines n'en peut être troublée; elles demeurent toujours équi-distantes, comme si elles étaient rangées en cercle. C'est à cet ordre remarquable que tient la résolution algébrique des équations binômes, et, en général, celle de toute équation où l'inconnue est une fonction des racines de l'unité : ce qui comprend au fond, comme on peut le démontrer, toutes les équations possibles à racines périodiques (*voyez* le tome IV des *Mémoires de l'Académie des Sciences*).

19. On voit, par ce que je viens d'indiquer rapidement, combien la considération des racines primitives est importante, et que si l'on trouve une seule r de ces racines pour le nombre p, on pourra résoudre sur-le-champ toute équation binôme

$$x^n - A = \mathfrak{M}\, p.$$

Car cette équation n'est possible qu'autant que A est une puissance $n^{ième}$ exacte relativement à p; et par conséquent, il faudra qu'on ait

$$A = r^{in}.$$

Il n'y aura donc qu'à chercher dans la suite des puissances r^n, r^{2n}, r^{3n},... celle qui donne le résidu A; elle sera de la forme r^{in}, et l'équation

$$x^n - A = \mathfrak{M}\, p,$$

qui deviendra

$$x^n - r^{in} = \mathfrak{M}\, p,$$

donnera tout de suite

$$x = r^i;$$

et multipliant cette valeur r^i par les racines de

$$y^n - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

lesquelles seront au nombre de θ, si θ est le plus grand commun diviseur de n et $p - 1$, on trouvera les θ racines différentes de la proposée.

On peut tirer de là tous les théorèmes qui regardent la résolution des équations binômes

$$x^n - A = \mathfrak{M}p.$$

20. Au reste, on peut toujours abaisser immédiatement la proposée à une équation semblable du degré θ. Car, soient

$$n = n'\theta, \quad \text{et} \quad p - 1 = p'\theta,$$

n' et p' étant premiers entre eux : la proposée donne d'abord, en négligeant les multiples de p,

$$x^{n'\theta} - A = 0, \quad \text{ou} \quad x^{n'\theta} = A;$$

d'où, en extrayant la racine $n^{\text{ième}}$ de part et d'autre, on tire

$$x^{\theta} = \sqrt[n']{A} = A^{\frac{1}{n'}}, \quad \text{ou bien} \quad x^{\theta} - A^{\frac{1}{n'}} = 0;$$

et il ne s'agit plus que de réduire l'exposant fractionnaire $\frac{1}{n'}$ à un entier φ, sans changer la valeur de l'exponentielle. Mais, par hypothèse, A étant une puissance exacte de degré $n = n'\theta$, est aussi, par là même, une puissance de degré θ; le nombre A est donc racine de l'équation

$$x^{\frac{p-1}{\theta}} - 1 = 0,$$

qui renferme toutes les puissances θ des différents nombres

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, p-1,$$

et, par conséquent, on a

$$A^{\frac{p-1}{\theta}} = 1, \quad \text{ou} \quad A^{p} = 1.$$

Donc, à tout exposant de A il est toujours permis d'ajouter un multiple arbitraire de p', et au lieu de A, on peut mettre $A^{1+\mathfrak{M}p'}$, $\mathfrak{M}$ étant un multiple quelconque. Mais si l'on veut actuellement tirer la racine $n^{\text{ième}}$ de A, il faut choisir ce multiple $\mathfrak{M}$ de manière que l'exposant $1 + \mathfrak{M}p'$ soit exactement divisible par n'; ce qui donne l'équation du premier degré

$$1 + \mathfrak{M}p' = n'z.$$

équation toujours possible, puisque les coefficients p' et n' sont premiers entre eux. Ainsi l'on trouvera toujours un entier φ équivalent à l'exposant fractionnaire $\frac{1}{n'}$, et l'on aura

$$\sqrt[n]{A}, \quad \text{ou} \quad A^{\frac{1}{n}} = A^{\varphi},$$

et la proposée

$$x^n - A = \mathfrak{M}\, p$$

sera ramenée à la forme

$$x^{\varphi} - A^{\varphi} = \mathfrak{M}\, p,$$

φ étant le plus grand commun diviseur de n et de $p - 1$; *ce qu'il fallait trouver.*

Ainsi, quand on propose une équation binôme de la forme

$$x^n - A = \mathfrak{M}\, p,$$

on peut supposer qu'elle est déjà réduite, de manière que le degré n soit un diviseur de $p - 1$; ce qui simplifie le calcul, sans rien ôter à la généralité de la question.

Mais cette méthode élégante qu'on vient de suivre pour abaisser l'équation au degré marqué par le plus grand commun diviseur de n et $p - 1$, nous donne l'idée d'une méthode semblable par laquelle on pourrait essayer d'abaisser de même cette réduite au premier degré, et d'obtenir par là une solution directe de la proposée.

Article V.

Solution directe de l'équation $x^n - A = \mathfrak{M}\, p$.

21. Soit

$$x^n - A = \mathfrak{M}\, p,$$

ou plus simplement

$$x^n = A$$

n étant supposé diviseur de $p - 1$); j'en tire, comme ci-dessus,

$$x = \sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}:$$

et il ne s'agit plus que de réduire l'exposant $\frac{1}{n}$ à un entier e, sans changer la valeur de $A^{\frac{1}{n}}$. Or A étant une puissance $n^{ième}$ exacte, est par cela même une racine de

$$x^{\frac{p-1}{n}} - 1 = 0.$$

et l'on a

$$A^{\frac{p-1}{n}} = 1.$$

Ainsi à tout exposant de A il est permis d'ajouter un multiple quelconque de $\frac{p-1}{n}$, et l'on peut écrire, au lieu de A, $A^{1+\mathfrak{M}\frac{p-1}{n}}$. Pour en tirer la racine $n^{ième}$, il n'y a donc qu'à rendre ce nouvel exposant $1 + \mathfrak{M}\frac{p-1}{n}$ exactement divisible par n, ce qui donne l'équation indéterminée

$$1 + \mathfrak{M}\left(\frac{p-1}{n}\right) = ne.$$

Or, cette équation est possible lorsque n et $\frac{p-1}{n}$ sont premiers entre eux. Dans ce cas, on déterminera sur-le-champ l'exposant inconnu e qui équivaut à $\frac{1}{n}$, et l'on aura, pour une des racines de la proposée,

$$x = A^e.$$

Soient, par exemple,

$$p = 13. \quad n = 3.$$

et la proposée

$$x^3 - 8 = \mathfrak{M}\ 13;$$

on aura, pour une des racines,

$$x = 8^e.$$

l'exposant e étant donné par l'équation du premier degré

$$1 + \mathfrak{M}\ 4 = 3e.$$

Cette équation est possible, puisque 3 et 4 sont premiers entre eux,

et elle donne, pour la valeur de e,

$$e = -1,$$

ou, si l'on veut,

$$e = 3,$$

d'où il vient

$$x = 8^3 = 5,$$

qui est effectivement une des racines cubiques de 8, relativement au nombre premier 13.

22. Voilà donc une méthode directe qui apprend à trouver une solution de l'équation binôme $x^n - A = \mathfrak{M}p$, lorsque le degré n (diviseur de $p-1$) est premier à $\frac{p-1}{n}$; ce qui fait deux fois autant de cas qu'il y a de manières de partager le nombre composé $p-1$ en deux facteurs premiers entre eux.

Mais il se présente ici une difficulté singulière qu'il est important de proposer et de résoudre, parce qu'elle touche aux points fondamentaux de la théorie.

Difficulté singulière sur la solution qui précède.

23. Quand on se propose de trouver les racines $n^{\text{ièmes}}$ du nombre A, que je suppose être une puissance $n^{\text{ième}}$ exacte, on ne conçoit pas d'abord qu'il puisse y avoir aucune méthode par laquelle on dégage une de ces racines, de préférence aux autres, puisque toutes sont également définies par la même équation ou la même propriété de donner

$$x^n = A.$$

Et pourtant, par la voie que j'ai suivie, je viens de trouver une de ces racines en particulier, et d'obtenir, à l'aide d'une équation du premier degré, un certain exposant entier e qui est tel qu'on a

$$A^e = x.$$

On pourrait croire d'abord que cette expression A^e renferme une certaine équivoque, et qu'elle est également propre à représenter les autres racines, en ajoutant, ce qui est permis, à l'exposant e différents multiples de $\frac{p-1}{n}$. Mais il est évident, à cause de $A^{\frac{p-1}{n}} = 1$, qu'on re

tomberait toujours sur la même valeur de x; de sorte qu'on a une expression A^e, délivrée de toute équivoque, et qui répond à une certaine racine choisie entre les n racines semblables de la proposée : ce qui mérite bien d'être expliqué.

Solution de la difficulté.

24. Pour résoudre cette difficulté, sans rompre la suite de notre raisonnement, nous devons donc faire voir tout de suite que, parmi les n racines de A, il n'y en a qu'une seule qui jouisse de la propriété de pouvoir être représentée par une puissance entière du nombre A : or, c'est ce qu'on peut démontrer par la nature même de la question.

Et, en effet, s'il est possible qu'une des racines $n^{ièmes}$ de A soit représentée par une puissance entière A^e du nombre A lui-même, comme, par hypothèse, A est une puissance exacte du degré n, A^e sera aussi une puissance exacte du même degré n. Donc A^e sera tout à la fois racine de la proposée

$$x^n - A = 0,$$

et racine de l'équation

$$x^{\frac{p-1}{n}} - 1 = 0.$$

Or il est aisé de voir que ces deux équations binômes ont une racine commune et qu'elles n'en peuvent avoir qu'une seule, précisément parce qu'elles sont de degrés n et $\frac{p-1}{n}$ premiers entre eux.

C'est ce qu'on peut prouver directement par la recherche actuelle du commun diviseur entre les deux binômes

$$x^n - A, \quad \text{et} \quad x^{\frac{p-1}{n}} - 1.$$

Car soit, pour abréger,

$$\frac{p-1}{n} = m;$$

et supposons qu'on ait :

$$\begin{aligned} m &= nq + r, \\ n &= rq' + r', \\ r &= r'q'' + r'', \\ r' &= r''q''' + r''', \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(n étant $< m$, $r < n$, $r' < r$, $r'' < r'$, ...

Si l'on fait l'opération du commun diviseur entre les deux binômes $x^m - 1$ et $x^n - A$, jusqu'à ce que le plus petit exposant n soit tombé au-dessous de m, on aura d'abord le premier reste

$$A^q x^r - 1;$$

si l'on fait ensuite la même opération entre $x^n - A$ et ce reste $A^q x^r - 1$, on arrivera au deuxième reste

$$x^{r'} - A^{1+qq};$$

si l'on fait la même opération entre

$$A^q x^r - 1 \quad \text{et} \quad x^{r'} - A^{1+qq},$$

on arrivera au troisième reste

$$A^{q+q(1+qq)} x^{r''} - 1;$$

et si l'on continuait, on trouverait pour le reste suivant

$$x^{r'''} - A^{1+qq+q(q+q(1+qq))}.$$

et ainsi de suite. D'où l'on voit que les exposants successifs de x sont les restes r, r', r'', r''',... de la division de m par n, de n par r, de r par r', etc.; et que les exposants de A sont les numérateurs successifs des fractions convergentes vers la fraction $\frac{m}{n}$ dans le développement de cette valeur en fraction continue.

Mais si m et n sont premiers entre eux, on arrive nécessairement à quelque reste tel que r'' qui est égal à l'unité; et le reste suivant r''' est égal à zéro.

Donc, par l'opération du commun diviseur entre les binômes proposés, on arrive nécessairement à un reste du premier degré, tel que

$$A^{q+q(1+qq)} x^{r''} - 1,$$

et le reste suivant est

$$x^0 - A^{1+qq+q(q+q(1+qq))}.$$

Or ce reste est nul par hypothèse; car l'exposant de A est alors le numérateur même de la fraction proposée $\frac{m}{n}$, qui est la dernière des frac-

tions convergentes; et par conséquent, le reste dont il s'agit se réduit à

$$x^0 - A^m \quad \text{ou} \quad 1 - A^m,$$

qui est nul par hypothèse.

Donc, les deux binômes proposés ont le commun diviseur du premier degré,

$$A^{q+q''(1+qq')}x - 1,$$

lequel, égalé à zéro, donne

$$x = A^{-q-q''(1+qq')}.$$

Cette expression s'accorde parfaitement avec l'expression A^e que nous avons trouvée ci-dessus d'une manière directe: car le nombre e était déterminé par l'équation

$$1 + \mathfrak{M}\, m = ne,$$

et cette équation, résolue par la méthode des fractions continues, donne

$$e = -q - q'' - qq'q'';$$

ce qui est, abstraction faite du signe, le numérateur de la fraction convergente qui précède immédiatement la fraction $\frac{m}{n}$. Quant au signe *moins*, il tient ici au quantième du terme où l'on a supposé que la fraction continue s'arrête : si elle avait un terme de moins, ou un terme de plus, on aurait trouvé l'exposant e positif. Au reste, quand on aura un exposant négatif $-e$, on pourra toujours le changer en un autre qui soit positif, en écrivant A^{m-e} au lieu de A^{-e}.

On voit donc que, si m et n sont premiers entre eux, les deux équations binômes

$$x^m - 1 = 0, \quad \text{et} \quad x^n - A = 0,$$

ont une racine commune, et n'en peuvent avoir qu'une seule; et que la premiere méthode qu'on a suivie ne pouvait conduire qu'à cette racine singulière de la proposée

$$x^n - A = 0,$$

racine distinguée des $n - 1$ autres en ce que cette valeur est à la

fois une racine $n^{ième}$ de A, et une puissance $n^{ième}$ de quelque autre nombre.

25. Au reste, on aurait encore pu arriver au résultat précédent par une opération plus simple sur les deux équations proposées

$$x^m = 1 \quad \text{et} \quad x^n = A.$$

Car, à cause de $m = nq + r$, la première devient

$$x^{nq}.x^r = 1,$$

et mettant pour x^n sa valeur A tirée de la seconde, on trouve d'abord

$$A^q x^r = 1, \quad \text{ou} \quad x^r = A^{-q};$$

mais, de même, à cause de $n = rq' + r'$, $x^n = A$ devient

$$x^{rq}.x^{r'} = A,$$

et mettant pour x^r sa valeur A^{-q}, on trouve

$$A^{-qq'}.x^{r'} = A, \quad \text{ou bien} \quad x^{r'} = A^{1+qq'};$$

de la même manière, on trouverait

$$x^{r''} = A^{-q-q'(1+qq')},$$

etc., etc., comme ci-dessus.

Si l'on suppose de même $r'' = 1$, et partant, $r''' = 0$, on arrive également à l'équation

$$x = A^{-q-q'(1+qq')},$$

qui est vraie pourvu qu'on ait aussi la suivante

$$x^0 = A^m, \quad \text{ou} \quad 1 = A^m = 0,$$

ce qui est la condition qui a lieu ici par hypothèse.

26. Quand les exposants m et n ne sont pas premiers entre eux, l'équation

$$1 + \mathfrak{M} = ne$$

est impossible, et si m est la plus petite puissance de A qui amène l'unité, c'est-à-dire si le nombre A est une des *racines primitives* de

$$A^m - 1 = 0,$$

on peut conclure qu'il n'y a aucune expression de la forme A^e qui puisse être racine de la proposée

$$x^n - A = 0.$$

Mais si A, qui satisfait toujours à l'équation

$$A^m - 1 = 0,$$

n'est simplement *racine primitive* que d'une équation inférieure

$$A^{m'} - 1 = 0,$$

et que m' soit premier à n, la proposée aura encore une racine de la forme A^e. Car on trouverait, comme précédemment,

$$x = \sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}},$$

ou, à cause de $A^m = 1$,

$$x = A^{\frac{1 + \mathfrak{M} m'}{n}} = A^e,$$

l'exposant e étant donné par l'équation

$$1 + \mathfrak{M} m' = ne.$$

qui est possible, quand on suppose m' et n premiers entre eux.

Si cette dernière condition n'a pas lieu, la proposée ne peut avoir encore de racine de la forme A^e.

27. Nous voyons donc que *l'équation*

$$x^n - A = \mathfrak{M} p$$

ne peut jamais avoir de racine de la forme A^e : 1° *Quand* A *est une des racines primitives de l'équation*

$$A^{\frac{p-1}{n}} - 1 = \mathfrak{M} p;$$

2° *Quand* A *est racine primitive de quelque autre équation de degré* m' *qui n'est pas premier avec* n.

Ces deux cas enveloppent tous les autres; car, quel que soit le nombre donné A, il est nécessairement racine primitive, ou de

$$A^m - 1 = \mathfrak{M} p,$$

ou de quelque autre équation inférieure de degré m' diviseur de m.

Dans l'application, pour découvrir ce degré m', ou cette équation

$$A^m - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

dont A est racine primitive, il n'y aura rien de plus simple que de faire les puissances successives de A, jusqu'à ce qu'on en trouve une A^m qui donne l'unité. On déterminera ensuite le plus grand commun diviseur θ de m' et n. Si l'on a $\theta > 1$, il n'y aura aucune racine de la forme A^e à chercher. Si l'on a $\theta = 1$, il y en aura une $x = A^e$, et l'exposant e sera donné par l'équation du premier degré

$$1 + \mathfrak{M}\, m' = ne.$$

28. Mais je n'étendrai pas plus loin la recherche et l'examen de ces méthodes directes qu'on pourrait imaginer pour la résolution des équations binômes

$$x^n - A = \mathfrak{M}\, p.$$

Ce qu'il y a de plus simple et de plus général est de chercher d'abord une racine primitive r de l'équation

$$x^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}\, p.$$

On formera sur-le-champ la suite des puissances

$$r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ r^5,\ r^6,\ r^7, \ldots,\ r^{p-1},$$

et l'on écrira au-dessous les différents nombres qu'elles donnent relativement à p, et qui composent tous les nombres inférieurs 1, 2, 3,..., $p - 1$. Au moyen de ce tableau, on résoudra à la première vue toutes les équations binômes qui se rapporteraient au module p, et l'on exécutera avec la plus grande facilité toutes les opérations qu'on pourrait avoir à faire sur les racines.

Article VI.

De l'équation binôme $x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p^m$, où le module est une puissance quelconque p^m d'un nombre premier p supérieur à 2.

29 Soit n le nombre $p^{m-1}(p - 1)$ qui marque combien il y a de nombres 1, e, e', e'',..., inférieurs et premiers à p^m; l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, p^m$$

aura, comme on sait, les n racines entières $1, e, e', e'', \ldots$, et n'en aura pas davantage au-dessous du module p^m.

30. Maintenant je dis que *l'équation*

$$x^{\mathrm{D}} - 1 = \mathfrak{M}\, p^m,$$

où D *est un diviseur quelconque de* n, *ne peut avoir plus de* D *racines différentes au-dessous de* p^m.

Ce diviseur D de n, c'est-à-dire de $p^{m-1}(p-1)$, ne peut être que de la forme θp^ν ; θ étant un diviseur de $p-1$, et ν un exposant quelconque $< m$: il s'agit donc de démontrer que l'équation

$$x^{\theta p^\nu} - 1 = \mathfrak{M}\, p^m$$

ne peut avoir plus de θp^ν racines différentes inférieures à p^m.

Comme cette démonstration est longue et difficile, j'aurai soin de la diviser, et d'en ordonner les parties de manière à y ménager comme autant de points de repos.

Démonstration.

I. Je remarque d'abord que, quelles que soient les racines de cette équation, relative au module p^m, elles doivent satisfaire, à plus forte raison, à la même équation rapportée au simple module p, c'est-à-dire à l'équation $x^{\theta p^\nu} - 1 = \mathfrak{M}\, p$. Mais il est clair que toutes les racines de celle-ci doivent satisfaire à l'équation $x^\theta - 1 = \mathfrak{M}\, p$, puisque θ est le plus grand commun diviseur de θp^ν et $p-1$. Donc toutes les racines de la proposée doivent satisfaire à la simple équation

$$x^\theta - 1 = \mathfrak{M}\, p.$$

Or celle-ci ne peut avoir que θ racines différentes $a, b, c, \ldots$ en nombres inférieurs à p; et, par conséquent, tous les nombres possibles qui peuvent y satisfaire sont nécessairement de la forme

$$a + \mathfrak{M}\, p, \quad b + \mathfrak{M}\, p, \quad c + \mathfrak{M}\, p, \ldots;$$

donc toutes les racines de la proposée doivent se rapporter aux θ formes différentes

$$a + \mathfrak{M}\, p, \quad b + \mathfrak{M}\, p, \quad c + \mathfrak{M}\, p, \ldots.$$

II. Soit donc α une de ces racines qui répondent à la forme $a + \mathfrak{M}p$. Si l'on prouvait, en premier lieu, que $\alpha + yp^{m-\nu}$ en est une autre, quel que soit y, il s'ensuivrait qu'on en peut compter ainsi un nombre p^ν, en donnant à y les p^ν valeurs successives 0, 1, 2, 3, 4,... jusqu'à $p^\nu - 1$; et sans aller au delà, puisque les racines $\alpha + yp^{m-\nu}$ reviendraient alors aux précédentes, mais prises au-dessus du module p^m.

Si l'on prouvait, en second lieu, que toute autre racine α' qui répondrait à la même forme que α, c'est-à-dire à la forme $\alpha + \mathfrak{M}p$, et d'où résulterait ainsi

$$\alpha' = \alpha + \mathfrak{M}p,$$

retombe nécessairement sur une de celles que je viens d'énumérer, il s'ensuivrait que la proposée ne peut avoir plus de p^ν racines différentes relatives à a, plus de p^ν racines relatives à b, etc., et, par conséquent, plus de θp^ν racines différentes, au-dessous du module p^m.

III. Pour établir le premier des deux points qu'on vient de supposer, il suffirait de prouver que si l'on cherche, par le binôme de Newton, le développement de $(\alpha + yp^i)^{\theta p^\nu}$, on trouvera un résultat de cette forme

$$(\alpha + yp^i)^{\theta p^\nu} = \alpha^{\theta p^\nu} + \mathrm{Y}p^{i+\nu},$$

où Y est un entier. Car, en faisant $i + \nu = m$, c'est-à-dire $i = m - \nu$, on verrait que le second membre se réduit à $1 + \mathfrak{M}p^m$, puisque α étant racine par hypothèse, $\alpha^{\theta p^\nu}$ se réduit à $1 + \mathfrak{M}p^m$: d'où l'on pourrait conclure que si α est racine de la proposée, $\alpha + yp^{m-\nu}$ en est une autre quel que soit y : ce qui est la première de nos deux suppositions.

Ensuite, il faudrait prouver que, si y est premier à p, le multiple Y est aussi premier à p : de sorte que $p^{i+\nu}$ est la plus haute puissance de p, par laquelle on puisse diviser le terme $\mathrm{Y}p^{i+\nu}$, et qu'ainsi $\alpha + yp^i$ ne peut être racine si l'exposant i tombe au-dessous de $m - \nu$. Car il s'ensuivra que toute racine α' relative au résidu α, et par conséquent de la forme $\alpha + yp^i$, retombe nécessairement dans la forme $\alpha + yp^{m-\nu}$: ce qui est la seconde de nos deux suppositions.

IV. Tout se réduit donc enfin à démontrer que l'on a toujours, quel que soit y, l'équation

$$(\alpha + yp^{m-\nu})^{\theta p^\nu} = \alpha^{\theta p^\nu} + \mathrm{Y}p^{m-\nu}.$$

telle, que Y est un nombre entier; et que, si y est premier à p, le nombre Y est aussi premier à p.

V. La démonstration immédiate de ce théorème, qui paraît facile au premier coup d'œil, présente néanmoins beaucoup de difficultés, à cause de l'exposant composé θp^i d'où naissent les coefficients du binôme. Mais voici un moyen très-simple de sortir de cet embarras, et d'arriver au théorème de la manière la plus claire et la plus rapide. C'est de supposer qu'au lieu d'élever tout d'un coup le binôme $\alpha + yp^i$ à la puissance θp^i, on l'élève d'abord à la simple puissance p; et puis le résultat obtenu à la puissance p; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive au résultat qui réponde à la puissance p^θ; et enfin, de supposer qu'on forme la puissance θ de ce dernier résultat.

Or, en élevant le binôme $\alpha + yp^i$ à la puissance p, on a

$$(\alpha + yp^i)^p = \alpha^p + p.\alpha^{p-1}yp^i + \frac{p.\overline{p-1}}{2}\alpha^{p-2}y^2p^{2i} + \ldots,$$

où l'on voit que le second terme est divisible par p^{i+1}, et que tous les autres le sont, au moins par p^{i-2}, pourvu que le nombre premier p soit > 2 : car le coefficient du troisième terme, qui est $\frac{p.\overline{p-1}}{2}$, est alors divisible par p, et par conséquent ce troisième terme est divisible par p^{2i+1}, et l'est ainsi, au moins, par p^{i+2}, puisque i est supposé être au moins 1 : quant aux autres termes qui contiennent p^{3i}, p^{4i}, etc., il est évident qu'ils sont au moins divisibles par p^{i+2}; on a donc

$$(\alpha + yp^i)^p = \alpha^p + Y_{,}p^{i+1},$$

où $Y_{,}$ est un nombre entier. Et l'on voit, de plus, que cet entier $Y_{,}$ est de la forme $\alpha^{p-1}y + \mathfrak{M}p$: si donc y est premier à p (comme α l'est aussi par hypothèse), le multiple $Y_{,}$ sera aussi premier à p.

Mais par la même raison, en élevant le nouveau binôme $\alpha^p + Y_{,}p^{i+1}$ à la puissance p, ce qui donnera la puissance p^2 du premier binôme $\alpha + yp^i$, on trouvera

$$(\alpha + yp^i)^{p^2} = \alpha^{p^2} + Y_{,,}p^{i+2},$$

où $Y_{,,}$ sera un entier, premier à p, si $Y_{,}$, et par conséquent si y est pre-

mier à p. Et ainsi de suite; d'où l'on conclut

$$(\alpha + \gamma p^i)^{p^\nu} = \alpha^{p^\nu} + Y_\nu p^{i+\nu},$$

où Y_ν est un entier, premier à p si γ est premier à p.

Actuellement, qu'on élève à la puissance θ, et il vient

$$(\alpha + \gamma p^i)^{\theta p^\nu} = \alpha^{\theta p^\nu} + Y p^{i+\nu},$$

où il est évident que Y est un entier de la forme

$$\theta . \alpha^{p^\nu(\theta-1)} . Y_\nu + \mathfrak{M} p;$$

or, si γ est premier à p, comme Y_ν le sera aussi, et que α et $\theta < p$ le sont aussi par hypothèse, il s'ensuit que Y sera aussi premier à p. Ce qui donne enfin *le théorème général qu'il s'agissait de démontrer.*

31. Il résulte de là que l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M} p^m,$$

où le nombre n est égal à $p^{m-1}(p-1)$, a des *racines primitives*, c'est-à-dire des racines qui, par leurs puissances successives 0, 1, 2, 3,..., $n-1$, sont propres à former la série complète de tous les nombres 1, e, e', e'',... inférieurs et premiers à p^m. Car, puisque aucune équation

$$x^D - 1 = \mathfrak{M} p^m,$$

où D est diviseur de n, ne peut avoir plus de D racines différentes au-dessous de p^m, on démontrera ici, par un raisonnement tout à fait semblable à celui du n° **12**, que parmi les n racines de la proposée, il y en a au moins une qui, par ses puissances successives 0, 1, 2, 3,..., $n-1$, ne ramènera point l'unité avant la puissance $n^{ième}$, et qui, par conséquent, formera la suite complète de toutes les racines de la proposée.

Et maintenant, si r est une de ces racines primitives, il est clair que toute puissance r^h, d'exposant h premier à n, en est une autre; et que toute puissance r^q, d'exposant q diviseur de n, est une racine primitive de l'équation binôme inférieure

$$x^{\frac{n}{q}} - 1 = \mathfrak{M} p^m.$$

32. Enfin, tout ce qu'on vient de démontrer pour un module p^m qui est une puissance d'un nombre premier supérieur à 2, peut également s'appliquer au cas où le module est le double de cette puissance, c'est-à-dire est égal à $2p^m$.

En effet, en considérant l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\,(2p^m\,,$$

où le nombre n qui marque combien il y a de nombres inférieurs et premiers à $2p^m$ est le même que ci-dessus, c'est-à-dire est $p^{m-1}(p-1)$, on ferait voir de la même manière que l'équation

$$x^{\theta p^\nu} - 1 = \mathfrak{M}\,(2p^m$$

ne peut avoir que θp^ν racines différentes au-dessous de $2p^m$. Car ces racines devant toutes satisfaire à la simple équation

$$x^\theta - 1 = \mathfrak{M}\,(2p\,,$$

et celle-ci ne pouvant avoir plus de θ racines en nombres a, b, c,... inférieurs à $2p$, il s'ensuit que toutes les racines de la proposée doivent entrer dans les θ formes

$$a + \mathfrak{M}\,p, \quad b + \mathfrak{M}\,p, \quad c + \mathfrak{M}\,p, \ldots,$$

et que, par conséquent, si α est une racine de la forme $a + \mathfrak{M}\,p$, où a est nécessairement *impair* et $\mathfrak{M}$ *pair*, $\alpha + \gamma p^{m-\nu}$ en est une autre, quel que soit le multiple pair γ, pris depuis 0 jusqu'à $2p^\nu - 2$, ce qui fait en tout p^ν valeurs différentes au-dessous de $2p^m$.

On ferait voir que toute autre racine α' se rapportant à la même forme $a + \mathfrak{M}\,p$, rentrerait nécessairement dans les précédentes, etc.; d'où résulte exactement, pour les équations binômes rapportées au double d'une puissance d'un nombre premier, la même suite de propriétés que pour les équations binômes rapportées à la simple puissance de ce nombre premier.

33. Quand le nombre premier p est égal à 2, toutes ces propriétés n'ont plus lieu; et l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\,2^m$$

ne peut plus avoir de racines primitives, excepté dans le cas unique

de $m = 2$, ce qui donne le module 2^m égal à 4. En effet, l'exposant n, qui devient alors égal à 2, ne peut avoir au-dessous de lui d'autre diviseur que l'unité; or, l'équation

$$x - 1 = \mathfrak{M}\, 2^2$$

ne pouvant avoir qu'une seule racine 1, il s'ensuit que la proposée

$$x^2 - 1 = \mathfrak{M}\, 2^2,$$

qui a deux racines, en a nécessairement une qui est *primitive*.

Au reste, la raison de cette exception particulière se trouve encore dans la propriété qu'ont les équations binômes rapportées au double d'un simple nombre premier p, d'avoir des racines primitives, *quel que soit* p, et par conséquent dans le cas même où $p = 2$.

Manière de résoudre l'équation $x^D - 1 = \mathfrak{M}\, p^m$ par l'équation $x^D - 1 = \mathfrak{M}\, p$

34. Il résulte du théorème précédent que si α est une racine de

$$x^D - 1 = \mathfrak{M}\, p^m, \quad \text{où} \quad D = \mathfrak{G} p^\nu,$$

$\alpha + \gamma p^{m-\nu}$ non-seulement en sera une autre, quel que soit γ, mais encore sera une racine relative au module p^{m+1} si l'on choisit γ d'une manière convenable.

En effet, on aura

$$(\alpha + \gamma p^{m-\nu})^D = \alpha^D + \mathfrak{G}\alpha^{D-1}.\gamma.p^m + \text{etc.},$$

où le reste des termes marqué par etc. est au moins divisible par p^{m+1}; or, puisqu'on a, par hypothèse,

$$\alpha^D - 1 = \mathrm{A} p^m,$$

il viendra

$$(\alpha + \gamma p^{m-\nu})^D = 1 + \mathrm{A} + \mathfrak{G}\alpha^{D-1}.\gamma.p^m + \text{etc.};$$

donc si l'on choisit γ de manière à rendre le coefficient $(\mathrm{A} + \mathfrak{G}\alpha^{D-1}.\gamma)$ divisible par p, tout le reste des termes après le premier 1, sera divisible par p^{m+1}; il n'y a donc qu'à déterminer γ par l'équation du premier degré

$$\mathrm{A} + \mathfrak{G}.\alpha^{D-1}.\gamma = \mathfrak{M}\, p,$$

équation toujours possible; car le coefficient de y est premier à p, et A est aussi premier à p, puisque α est supposé racine de

$$x^{\mathrm{D}} - 1 = \mathfrak{M}\, p^m,$$

pour le module p^m, et non pas pour le module plus élevé p^{m+1}.

Ainsi, quand on connaît une racine α qui appartient à l'équation

$$x^{\mathrm{D}} - 1 = \mathfrak{M}\, p^m,$$

et seulement pour le module p^m, de manière que le multiple $\mathfrak{M}$ est un nombre A qui n'est point divisible par p, on peut toujours trouver une racine $\alpha + yp^{m+\nu}$ qui résout la même équation pour le module plus élevé p^{m+1}; c'est-à-dire qu'on peut résoudre l'équation

$$x^{\mathrm{D}} - 1 = \mathfrak{M}\, p^{m+1}.$$

Donc, si l'on a une racine de la proposée pour le simple module p, on en peut déduire une autre pour le module p^2, et de celle-ci une autre pour le module p^3, et ainsi de suite; de sorte que la résolution d'une équation

$$x^{\mathrm{D}} - 1 = \mathfrak{M}\, p^m$$

ne dépend que de la résolution de l'équation

$$x^{\mathrm{D}} - 1 = \mathfrak{M}\, p,$$

rapportée au simple module p.

Article VII.

De l'équation binôme $x^n - 1 = \mathfrak{M}\,(2^m)$, où l'exposant m du module 2^m est supérieur à 2.

35. Cette équation du degré $n = 2^{m-1}$ a toujours 2^{m-1} racines différentes $1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2^m - 1$, en nombres inférieurs et premiers au module 2^m; mais l'équation du degré sous-double 2^{m-2},

$$x^{2^{m-2}} - 1 = \mathfrak{M}\,(2^m),$$

a encore les mêmes racines : car ces racines étant nécessairement de la forme $1 + y.2$, il est facile de voir (en faisant le carré de ce binôme, et

puis le carré du résultat, et ainsi de suite), qu'on a toujours

$$(1 + y.2^{2^\nu})^{2^\nu} = 1 + \mathfrak{M}\, 2^{\nu+1},$$

quel que soit y; on a donc

$$(1 + y\, 2^{\nu})^{2^{m-1}} = 1 + \mathfrak{M}\, 2^{m}.$$

Et cela peut se voir encore en observant que les racines peuvent toutes se mettre sous la forme $\pm\, 1 + y.2^{\nu}$; ce qui donne évidemment

$$(\pm 1 + y.2^{\nu})^{2^{m-1}} = 1 + \mathfrak{M}\, 2^{m}.$$

Il résulte donc de là qu'aucune racine de la proposée ne peut, par ses puissances successives 0, 1, 2, 3,..., fournir plus de la moitié des nombres inférieurs et premiers à 2^m, et par conséquent ne peut être une racine primitive de l'équation

$$x^{2^{m-1}} - 1 = \mathfrak{M}\, 2^{m}.$$

36. Mais s'il n'y a point ici de racines primitives *absolues*, on peut démontrer, du moins, qu'il y a toujours quelque racine propre à fournir, par ses puissances, la *moitié* des 2^{m-1} résidus inférieurs et premiers à 2^m, ce qui mérite d'être remarqué.

En effet, si l'on considère le binôme $1 + y.2^i$, où je suppose que y soit impair, et i au moins égal à 2, il est facile de voir qu'on aura toujours l'équation

$$(1 + y.2^{i})^{2^{\nu}} = 1 + Y.2^{i+\nu},$$

où Y sera un entier impair.

Donc la plus haute puissance de 2, qui puisse diviser $(1+y.2^i)^{2^\nu} - 1$, est $2^{i+\nu}$; donc pour que le binôme $1 + y.2^i$, élevé aux puissances successives 0, 2, 2^2, 2^3,..., puisse ramener l'unité par rapport au module 2^m, il faut au moins aller jusqu'à la puissance 2^ν, telle que $\nu + i$ soit égal à m.

Donc, si l'on donne à i la plus petite valeur qu'il puisse avoir dans le théorème précédent, et qui est $i=2$, on aura le binôme $1 + y.2^2$, dont aucune puissance 2, 2^2, 2^3,... ne donnera l'unité avant la puissance 2^{m-2}. On ne pourra donc trouver 1 pour aucun des exposants 2, 4, 8,... qui forment tous les diviseurs de 2^{m-2}; et comme, d'un autre côté, cela

ne pourrait avoir lieu pour aucun autre exposant sans avoir lieu pour son commun diviseur avec 2^{m-2}, il s'ensuit qu'on ne pourra trouver l'unité pour aucun des exposants 1, 2, 3, 4, 5,... inférieurs à 2^{m-2}.

Donc la racine $x = 1 + y.2^2$, où y est un impair, est une espèce de racine primitive de l'équation proposée, en ce qu'elle fournit par ses puissances successives 0, 1, 2, 3, 4, 5,... une moitié des 2^{m-1} racines différentes de cette proposée.

Et maintenant, il est clair qu'en prenant dans cette période de résidus le troisième terme, le cinquième, le septième, etc., on aura autant de ces sortes de racines primitives qu'il y a de nombres inférieurs et premiers au nombre 2^{m-2}, et que, par conséquent, il y en aura 2^{m-2}; c'est ce qui s'accorde d'ailleurs avec l'expression $1 + y.2^2$ de ces racines primitives, puisqu'on ne peut donner à y que les 2^{m-3} valeurs impaires $1, 3, 5, 7, \ldots, (2^{m-2} - 1)$.

Si, au lieu du binôme $1 + y.2^i$, on eût considéré le binôme $-1 + y.2^i$, on aurait trouvé exactement les mêmes propriétés; d'où je conclus, en donnant à y les mêmes valeurs que ci-dessus, qu'il y a encore 2^{m-3} nouvelles racines primitives de la même espèce que les précédentes.

37. Mais il faut bien remarquer que chacune de ces nouvelles racines fournit, par ses puissances, une moitié des résidus qui n'est pas la même que la moitié précédente, et que ces deux périodes n'auront de commun qu'une moitié de leurs termes, et, par conséquent, un quart de tous les résidus.

Ainsi, pour le cas de $m = 5$, ou pour le module $2^5 = 32$, on a l'équation

$$x^{16} - 1 = \mathfrak{M}\ 32,$$

qui a les seize racines 1, 3, 5, 7, 9,..., 31, et qui n'en a pas davantage au-dessous de 32. Mais l'équation

$$x^8 - 1 = \mathfrak{M}\ 32,$$

du degré sous-double, a les mêmes seize racines, de sorte que cette équation a deux fois plus de racines que d'unités dans l'exposant de son degré. Aucune des seize racines de la proposée ne pouvant donc passer la huitième puissance sans ramener l'unité, ne peut fournir plus de huit résidus différents par rapport au module 32; et il n'y a point de racines primitives absolues.

Mais il y en a, du moins, de relatives à la moitié des seize résidus dont il s'agit; et ces racines sont

$$1 + 4,\quad 1 + 3.4,\quad 1 + 5.4,\quad 1 + 7.4,\quad \text{ou bien}\quad 5,\ 13,\ 21,\ 29.$$

Et, par exemple, la première 5, étant élevée aux puissances successives 0, 1, 2, 3, 4, 5,.., fournit les huit racines différentes

$$1,\ 5,\ 25,\ 29,\ 17,\ 21,\ 9,\ 13;$$

et chacune des trois autres 13, 21, 29 fournirait exactement, mais dans un autre ordre, la même période de ces huit résidus.

Ensuite, il y en a quatre autres, savoir :

$$-1 + 4,\quad -1 + 3.4,\quad -1 + 5.4,\quad -1 + 7.4,\quad \text{ou bien}\quad 3,\ 11,\ 19,\ 27,$$

telles que chacune fournit aussi huit résidus différents

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 17,\ 19,\ 25,\ 11$$

nouvelle période qui n'a de commun avec la première que les quatre termes 1, 9, 17, 25.

Ainsi, dans le polygone régulier de trente-deux côtés, si l'on joint les sommets de 5 en 5, et puis dans le nouveau polygone qui en résulte, si l'on joint encore les sommets de 5 en 5, et qu'on fasse de même dans le polygone résultant, et ainsi de suite, on produira dans un certain ordre huit des seize polygones réguliers différents de trente-deux côtés.

Et, en prenant un quelconque de ceux qui restent et faisant la même opération, on produira dans un ordre semblable les huit autres polygones réguliers; de sorte que les seize polygones réguliers de trente-deux côtés seront partagés en deux groupes semblables, où chaque polygone dérive du précédent par la même loi.

Mais cette manière de les partager en deux groupes n'est pas unique, car en employant une racine de la forme $-1 + 4y$, telle que la racine 3, on formera huit polygones réguliers qui ne seront pas les mêmes que les huit premiers dus à la racine 5 : il n'y en aura que quatre de communs aux deux périodes.

38. En général, la racine $x = 1 + y.2^i$, où y est impair, et i au moins

égal à 2, conduira à une période de 2^{m-i} racines différentes; et $x' = -1 + y.2^i$ conduira à une période d'autant de racines; mais ces deux périodes n'auront de commun que la moitié de leurs termes : car il est aisé de voir que les puissances paires de x' sont les seules qui puissent revenir, et qui reviennent en effet (dans un autre ordre, ce qui est indifférent) aux puissances paires de x.

39. Quant à la résolution de l'équation binôme

$$x^{2^{m-i}} - 1 = \mathfrak{M}\, 2^m,$$

elle n'a aucune difficulté, et il est évident que la forme de ses racines est

$$x = \pm 1 + y.2^i,$$

ce qui donne, en faisant

$$y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, (2^{m-i} - 1),$$

2^{m-i+1} racines; c'est-à-dire deux fois plus qu'il n'y a d'unités dans l'exposant 2^{m-i} du degré de l'équation proposée.

Et il n'y a pas d'autres racines, puisque ces racines X seraient nécessairement de la forme $(\pm 1 + y.2^{i'})$, l'exposant i' étant $< i$, et y impair, et qu'alors la puissance 2^{m-i} de cette expression serait

$$1 + Y.2^{i+m-i},$$

Y étant impair; de sorte que $X^{2^{m-i}} - 1$ serait tout au plus divisible par 2^{i+m-i} moindre que le module 2^m.

40. Ainsi, pour le module 32, l'équation

$$x^8 - 1 = \mathfrak{M}\, 32$$

a seize racines $x = \pm 1 + y.2^2$, en faisant $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

L'équation

$$x^4 - 1 = \mathfrak{M}\, 32$$

en a huit de la forme $\pm 1 + y.2^3$ qu'on trouve en faisant $y = 0, 1, 2, 3$.

Enfin l'équation

$$x^2 - 1 = \mathfrak{M}\, 32$$

en a quatre de la forme $\pm 1 + y.2^4$, en y faisant $y = 0, 1$.

Il n'y a que l'équation simple

$$x - 1 = \mathfrak{M}\, 2^m,$$

et l'équation

$$x^{2^m} - 1 = \mathfrak{M}\, 2^m,$$

qui aient précisément autant de racines qu'il y a d'unités dans l'exposant de leur degré; toutes les autres en ont le double.

Mais en voilà assez sur le cas singulier du module égal à une puissance de 2; il faut voir maintenant ce qui regarde les équations binômes rapportées à des modules composés.

Article VIII.

De l'équation binome $x^n - 1 = \mathfrak{M}\, N$, rapportée à un module composé N.

41. Soit $N = A^a.B^b.C^c\ldots$; A, B, C,... étant des nombres premiers absolument; si n est le nombre qui marque combien il y a de nombres $1, e, e', e'',\ldots$ inférieurs et premiers à N, on aura l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\, N,$$

qui admettra n racines $1, e, e', e'',\ldots$ et qui n'en aura pas davantage.

Mais x étant premier à N, est aussi premier à chacun des facteurs A^a, B^b, C^c,... de ce nombre composé N; on aura donc aussi

$$x^\alpha - 1 = \mathfrak{M}\, A^a, \quad x^\beta - 1 = \mathfrak{M}\, B^b, \quad x^\gamma - 1 = \mathfrak{M}\, C^c \ldots,$$

$\alpha, \beta, \gamma,\ldots$ étant les nombres qui marquent combien il y a de nombres inférieurs et premiers aux facteurs respectifs A^a, B^b, C^c,.... Or, soit m le plus petit nombre divisible à la fois par $\alpha, \beta, \gamma,\ldots$; il résulte des équations précédentes qu'on aura aussi

$$x^m - 1 = \mathfrak{M}\, A^a, \quad x^m - 1 = \mathfrak{M}\, B^b, \quad x^m - 1 = \mathfrak{M}\, C^c \ldots,$$

c'est-à-dire que le binôme $x^m - 1$ sera divisible à la fois par les facteurs A^a, B^b, C^c,... et par conséquent divisible par leur produit N, puisque ces facteurs sont premiers entre eux. On aura donc, pour une valeur quelconque de x,

$$x^m - 1 = \mathfrak{M}\, N.$$

Mais le plus petit nombre m qui soit divisible à la fois par $\alpha, \xi, \gamma, \ldots$ est toujours moindre que le produit $\alpha\xi\gamma\ldots$ si ces nombres ne sont pas premiers entre eux ; or, excepté le cas où N serait simplement une puissance A^a d'un nombre premier A, ou le double de cette puissance, les nombres

$$\alpha = A^{a-1}(A-1), \quad \xi = B^{b-1}(B-1), \quad \gamma = C^{c-1}(C-1)\ldots$$

ne sont jamais premiers entre eux, puisqu'ils ont au moins le commun diviseur 2 ; on a donc nécessairement le nombre $m < n$.

Donc un nombre quelconque x, premier à N, étant élevé aux puissances successives 1, 2, 3, 4,..., amènera toujours l'unité pour résidu, avant qu'on arrive à la puissance n ; donc il n'y a pas de nombres x dont les puissances successives $x, x^2, x^3, x^4, \ldots$ puissent former tous les nombres inférieurs et premiers à N ; et par conséquent le nombre composé N, ou, pour mieux dire, l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\,(N),$$

ne peut avoir ce qu'on appelle des *racines primitives*.

42. Quand le nombre N est une puissance A^a d'un nombre premier, ou le double $2A^a$ de cette puissance, cette conclusion n'a plus lieu : car on a alors

$$n = A^{a-1}(A-1) = \alpha,$$

et le plus petit nombre m divisible par α est α lui-même ; ainsi l'on a

$$m = n,$$

et il n'est plus prouvé que, dans ce cas, l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\,(N)$$

ne puisse avoir des racines primitives : et, en effet, on a démontré ci-dessus que cette équation a toujours de telles racines.

43. Quant à la résolution de l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\,N$$

(où N est de la forme $A^a B^b C^c \ldots$), ou, en général, de l'équation

$$x^n - 1 = \mathfrak{M}\,N,$$

dont le degré D est un diviseur de

$$A^{a-1}.B^{b-1}.C^{c-1}\ldots(A-1)(B-1)(C-1)\ldots,$$

elle n'offre pas non plus de difficulté, d'après ce qui a été dit précédemment sur la résolution des équations binômes rapportées à un module de la forme A^a : car chaque racine de la proposée doit satisfaire aux équations simples

$$x^D-1=\mathfrak{M}A^a,\quad x^D-1=\mathfrak{M}B^b,\quad x^D-1=\mathfrak{M}C^c\ldots.$$

Soient donc λ les racines de la première, μ celles de la seconde, ν celles de la troisième, etc.; chaque racine x de la proposée est donc à la fois des formes suivantes

$$\lambda+yA^a,\quad \mu+y'B^b,\quad \nu+y''C^c,\quad \text{etc.}$$

Cherchez donc les valeurs de y et y' pour que les deux racines

$$\lambda+yA^a \quad\text{et}\quad \mu+y'B^b$$

soient la même, et vous aurez, par l'équation du premier degré

$$\lambda+yA^a=\mu+y'B^b,$$

une racine μ' qui satisfera à

$$x^D-1=\mathfrak{M}(A^a.B^b),$$

et par conséquent sera de la forme

$$\mu'+z.A^a.B^b.$$

Déterminez maintenant z et y'' pour que les deux racines

$$\mu'+z.A^a.B^b \quad\text{et}\quad \nu+y''.C^c$$

soient la même, ce qui se fera par l'équation du premier degré

$$\mu'+z.A^aB^b=\nu+y''.C^c,$$

et vous aurez une nouvelle racine qui satisfera à l'équation

$$x^D-1=\mathfrak{M}(A^a.B^b.C^c);$$

et ainsi de suite.

NOUVELLES REMARQUES

SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. A. CAYLEY (DE CAMBRIDGE).

Je me propose de développer ici quelques conséquences de la théorie que j'ai donnée, il y a quelques mois, dans ce Journal [*], des points *correspondants* des courbes du troisième ordre. Rappelons d'abord la signification de ce terme et ajoutons-y quelques nouvelles définitions.

On dit que les points A, A′ sont correspondants quand les tangentes à la courbe en ces points se rencontrent sur la courbe. En considérant les points correspondants A, A′ et les deux autres points correspondants B, B′, on dit que ces paires correspondent, quand les points d'intersection H, h de AB′, A′B ou AB, A′B′ sont situés sur la courbe. Les trois paires A, A′, B, B′, H, h sont nommées paires supplémentaires ou système supplémentaire. On dirait de même que les deux systèmes AA′, BB′, Hh et $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $H_1h'_1$ sont des systèmes supplémentaires correspondants, si, par exemple, A, A′ et A_1, A'_1, etc., formaient des paires correspondantes.

On peut nommer quadrilatère inscrit le système de quatre droites qui passent par les points supplémentaires AA′, BB′, Hh, et conique d'involution chaque conique tangente à ces quatre droites, ou, en d'autres termes, inscrite dans un quadrilatère inscrit. Il est inutile d'expliquer ce que veulent dire coniques d'involution correspondantes, ou quadrilatères correspondants, ou l'expression conique correspondante à une paire donnée de points correspondants, etc.

[*] Voyez page 285 du tome IX.

Démontrons les théorèmes suivants :

Théorème I. « Les tangentes menées par un point P de la courbe » à trois coniques d'involution correspondantes forment un faisceau » en involution. »

Chaque conique peut se réduire à une paire de points qui correspondent aussi aux coniques (ce qui justifie la dénomination que nous avons donnée à ces coniques). Considérons un quadrilatère inscrit AA′, BB′, Hh, la conique d'involution tangente aux côtés de ce quadrilatère, et deux paires LL′, MM′ de points correspondants, ces paires étant correspondantes l'une à l'autre et à la conique d'involution. On sait que les lignes menées d'un point quelconque, et ainsi du point P de la courbe, par les points A, A′, B, B′, forment avec les tangentes à la conique menées par ce même point, un faisceau en involution. Mais PA, PA′, PB, PB′, PL, PL′, et de même PB, PB′, PL, PL′, PM, PM′, forment aussi des faisceaux en involution; donc les deux tangentes forment, avec PL, PL′ et PM, PM′, un faisceau en involution. De même, avec une conique correspondante à la première, PL, PL′, PM, PM′ et les deux tangentes forment un faisceau en involution; donc PL, PL′ et les quatre tangentes forment un faisceau en involution, et de même en introduisant la troisième conique.

Théorème II. « On peut circonscrire à une conique d'involution » donnée une infinité de quadrilatères inscrits correspondants au pre- » mier. »

Soient A, A′, B, B′, H, h, comme auparavant; et A_1, A'_1 une paire de points correspondants qui correspondent à ceux-ci; en menant par A_1, A'_1 des tangentes à la conique qui se rencontrent en B_1, B'_1, H_1, h_1, on voit d'abord que les lignes PA, PA′, PA_1, PA'_1 et les tangentes à la conique donnent un faisceau en involution; et réciproquement, chaque point P qui satisfait à cette condition appartient à la courbe. Mais en prenant, par exemple, pour P le point B_1, les lignes PA_1, PA'_1 deviennent identiques avec les deux tangentes, ce qui satisfait à la condition d'involution. Donc B_1, B'_1, H_1, h_1 appartiennent à la courbe, ou A_1, A'_1, B_1, B'_1, H_1, h_1 forment un quadrilatère inscrit correspondant au premier ou à la conique.

Théorème III. « Les centres d'homologie de deux coniques d'in-

» volution correspondantes forment un quadrilatère inscrit correspon-
» dant aux coniques. »

Considérons les deux coniques et une troisième conique quelconque. Chaque point P pour lequel les six tangentes forment un faisceau en involution appartient à la courbe. En prenant pour P un centre d'homologie des deux premières coniques, les deux paires de tangentes deviennent identiques, ce qui satisfait à la condition d'involution; donc les six centres d'homologie sont sur la courbe, ou ces six points sont les sommets d'un quadrilatère inscrit qui correspond aussi aux coniques.

Réciproquement,

Théorème IV. « Le lieu d'un point P qui se meut de manière que
» les tangentes menées par ce point à trois coniques données quelcon-
» ques, forment toujours un faisceau en involution, est une courbe
» du troisième ordre qui passe par les dix-huit centres d'homologie des
» coniques prises deux à deux, ces centres formant six à six des qua-
» drilatères inscrits correspondants. »

La démonstration analytique de la première partie de ce théorème, quoique longue, me paraît assez intéressante pour trouver place ici. Pour plus de symétrie, prenons $\frac{\xi}{\zeta}$, $\frac{\eta}{\zeta}$ pour les coordonnées indéfinies d'un point, et représentons par

$$Y = 0, \quad Y' = 0, \quad Y'' = 0$$

les équations des trois coniques, Y, etc. étant des fonctions homogènes de la forme

$$Y = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2F\eta\zeta + 2G\zeta\xi + 2H\xi\eta, \quad \text{etc.}$$

Soient $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ les coordonnées du point P; mettons, pour abréger,

$$U = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy,$$
$$W = Ax\xi + By\eta + Cz\zeta + F(y\zeta + \eta z) + G(z\xi + \zeta x) + H(x\eta + y\xi),$$

(de manière que $W = 0$ serait l'équation de la ligne polaire du point P). Nous avons

$$UY - W^2 = 0$$

pour l'équation des deux tangentes menées par le point P à la conique. Cela est probablement connu. Il est clair d'abord que cette équation appartient à une conique qui a un double contact avec la conique donnée, et par la forme à laquelle nous allons réduire cette équation, on voit ensuite qu'elle appartient à un système de deux droites qui passentpar le point P. En développant et écrivant

$$BC - F^2 = a, \quad CA - G^2 = b, \quad AB - H^2 = c,$$
$$GH - AF = f, \quad HF - BG = g, \quad FG - CH = h,$$

on trouve, en effet,

$$\begin{aligned} &a(y\zeta - z\eta)^2 + b(z\xi - x\zeta)^2 + c(x\eta - y\xi)^2 \\ &+ 2f(z\xi - x\zeta)(x\eta - y\xi) + 2g(x\eta - y\xi)(y\zeta - z\eta) \\ &+ 2h(y\zeta - z\eta)(z\xi - x\zeta) = 0. \end{aligned}$$

et de là, en posant

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= bz^2 + cy^2 - 2fyz, & \mathfrak{F} &= cyz + gxy - hxz - fx^2, \\ \mathfrak{B} &= cx^2 + az^2 - 2gxz, & \mathfrak{G} &= bzx - hyz - fxy + gy^2, \\ \mathfrak{C} &= ay^2 + bx^2 - 2hxy, & \mathfrak{H} &= cxy + fxz - gyz + hz^2, \end{aligned}$$

on obtient

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 + 2\mathfrak{F}\eta\zeta + 2\mathfrak{G}\xi\zeta + 2\mathfrak{H}\xi\eta = 0,$$

ou, en transportant l'origine au point P,

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + 2\mathfrak{H}\xi\eta = 0:$$

et de même, pour l'équation des tangentes, par ce même point aux deux autres coniques

$$\mathfrak{A}'\xi^2 + \mathfrak{B}'\eta^2 + 2\mathfrak{H}'\xi\eta = 0,$$
$$\mathfrak{A}''\xi^2 + \mathfrak{B}''\eta^2 + 2\mathfrak{H}''\xi\eta = 0$$

On obtient donc, pour la condition que ces lignes forment un faisceau en involution,

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{H} \\ \mathfrak{A}', & \mathfrak{B}', & \mathfrak{H}' \\ \mathfrak{A}'', & \mathfrak{B}'', & \mathfrak{H}'' \end{vmatrix} = 0.$$

en représentant de cette manière le déterminant formé avec ces neuf quantités. Formons d'abord la fonction

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}\mathfrak{B}''.$$

Cela se réduit à

$$z\left[\begin{array}{l} -2(fc)x^2y - 2(cg)xy^2 + (bc)x^2z + 4(fg)xyz + (ca)y^2z \\ \qquad\qquad -2(bg)xz^2 - 2(fa)y^2z + (ba)z^3 \end{array}\right].$$

où $(fc) = (f'c'' - f''c')$, etc.

Multipliant par $\mathfrak{H}$, formant ensuite les quantités analogues et ajoutant; écrivant aussi

$$c(fg) + c'(f'g') + c''(f''g'') = (cfg),$$

c'est-à-dire (cfg) pour le déterminant formé avec les neuf quantités

$$c,\ f,\ g,\quad c',\ f',\ g',\quad c'',\ f'',\ g''.$$

on obtient d'abord les termes

$$-4(cfg)x^2y^2z^2,\quad +2(fcg)x^2y^2z^2,\quad -2(gfc)x^2y^2z^2.$$

qui se détruisent; les autres termes contiennent z^3 comme facteur, et en écartant cette quantité, l'on obtient en dernière analyse l'équation

$$\begin{aligned} &(cbf)x^3 + (acg)y^3 + (bah)z^3 \\ &+ [2(agf) + (cah)]y^2z + [2(bhg) + (abf)]z^2x + [2(cfh) + (bcg)]x^2y \\ &+ [2(afh) + (abg)]yz^2 + [2(bgf) + (bch)]zx^2 + [2(chg) + (caf)]xy^2 \\ &\qquad + 4(fgh)xyz = 0. \end{aligned}$$

(où l'on peut, si l'on veut, écrire $z = 1$). C'est l'équation d'une courbe du troisième ordre.

Observation. Cette méthode peut être utile dans l'investigation d'autres problèmes relatifs aux coniques. Par exemple, la question de déterminer les centres d'homologie de deux coniques données revient à celle-ci : satisfaire identiquement à l'équation

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 + 2\mathfrak{F}\eta\zeta + 2\mathfrak{G}\xi\zeta + 2\mathfrak{H}\xi\eta \\ &k(\mathfrak{A}'\xi^2 + \mathfrak{B}'\eta^2 + \mathfrak{C}'\zeta^2 + 2\mathfrak{F}'\eta\zeta + 2\mathfrak{G}'\xi\zeta + 2\mathfrak{H}'\xi\eta) = 0, \end{aligned}$$

parce que, en effectuant cela, il est facile de voir que $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ sont les coordonnées du centre cherché. Écrivons

$$a + ka' = \mathrm{a}, \quad b + kb' = \mathrm{b}, \quad \text{etc.},$$

l'on obtient les six équations

$$\begin{aligned} &\mathrm{b}z^2 + \mathrm{c}y^2 - 2\mathrm{f}yz = 0, && \mathrm{c}x^2 + \mathrm{a}z^2 - 2\mathrm{g}zx = 0, \\ &\mathrm{a}y^2 + \mathrm{b}x^2 - 2\mathrm{h}xy = 0, && \mathrm{a}yz - \mathrm{g}xy - \mathrm{h}xz - \mathrm{f}x^2 = 0, \\ &\mathrm{b}zx - \mathrm{h}yz - \mathrm{f}yx + \mathrm{g}y^2 = 0, && \mathrm{c}xy - \mathrm{f}zx - \mathrm{g}zy + \mathrm{h}z^2 = 0, \end{aligned}$$

dont les trois dernières se déduisent des autres. On peut, de ces six équations, éliminer les six quantités $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$, considérées comme indépendantes; on obtient ainsi, toute réduction faite,

$$(\mathrm{abc} - \mathrm{af}^2 - \mathrm{bg}^2 - \mathrm{ch}^2 + 2\mathrm{fgh})^2 = 0,$$

équation qui détermine la quantité k; les trois premières équations deviennent alors équivalentes à deux, qui suffisent pour déterminer les rapports $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$. Il serait facile de rapprocher cette solution de celle que l'on déduit de la théorie des polaires réciproques. Par exemple, l'équation qui vient d'être obtenue entre les quantités a, b,... est précisément celle qui exprime que la fonction

$$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}y^2 + \mathrm{c}z^2 + 2\mathrm{f}yz + 2\mathrm{g}xz + 2\mathrm{h}xy$$

se divise en facteurs linéaires. Remarquons encore que, dans la géométrie solide, l'équation

$$\mathrm{UY} - \mathrm{W}^2 = 0$$

appartient au cône, ayant le point P pour sommet, et circonscrit à une surface du second ordre qui a pour équation $\mathrm{Y} = 0$. C'est un cas particulier d'une autre formule que voici :

« En représentant par $\mathfrak{P}$ une fonction linéaire des trois variables ξ, η, ζ (ou de quatre variables sans termes constants), et par P la même fonction de x, y, z, l'équation

$$\mathfrak{P}^2\mathrm{U} - 2\mathfrak{P}\mathrm{PW} + \mathrm{P}^2\mathrm{Y} = 0$$

appartient au cône ayant pour sommet le point dont les coordonnées sont x, y, z, et passant par la courbe d'intersection du plan $P = 0$, et de la surface du second ordre $Y = 0$. Et de même pour deux variables. »

Je finirai en citant un théorème de géométrie dû à M. Hesse [*], qui a quelques rapports avec le sujet que je viens de traiter :

« Le lieu d'un point P qui se meut de manière que ses polaires, par rapport à trois coniques données, se rencontrent dans le même point, est une courbe du troisième ordre, et encore cette courbe ne change pas quand on remplace les coniques données

$$U = 0, \quad U' = 0, \quad U'' = 0,$$

par trois nouvelles coniques de la forme

$$\lambda U + \lambda' U' + \lambda'' U'' = 0. \text{ »}$$

Cette courbe du troisième ordre est tout à fait distincte de celle que j'ai considérée.

---

[*] *Voyez* le Journal de M. Crelle, tome XXVIII.

MÉMOIRE

SUR DIVERSES PROPRIÉTÉS

DES SURFACES DU DEUXIÈME ORDRE

DÉDUITES DE LA THÉORIE DES FOCALES;

PAR B. AMIOT.

1. Dans un précédent Mémoire, qui a obtenu l'approbation de l'Académie des Sciences (*voyez* le tome VIII, page 161 de ce Journal), nous avons établi qu'il existe en général, pour toute surface du deuxième ordre, deux courbes qui jouissent de propriétés analytiques et géométriques analogues à celles des foyers dans les sections coniques. Nous nous étions attaché dans ce premier Mémoire à découvrir celles des propriétés de ces courbes qui correspondent aux propriétés essentiellement caractéristiques des foyers ordinaires. Dans celui-ci nous allons chercher à établir plusieurs théorèmes nouveaux qui correspondent à d'autres propriétés des foyers et qui étendent de plus en plus l'analogie entre les focales des surfaces et les foyers des courbes du deuxième degré. Nous ferons ensuite l'application de quelques-unes de ces propositions à la résolution de certains problèmes relatifs aux surfaces du deuxième ordre : on verra par là que les résultats de notre analyse peuvent devenir de quelque utilité dans les applications géométriques.

2. *Si l'on fait, sur une surface du deuxième ordre douée d'un centre, une section par un plan perpendiculaire à l'un quelconque des axes, et que, par les différents points de cette section, on mène des plans tangents à la surface, le lieu des pieds des perpendiculaires, abaissées de l'un des deux foyers conjugués à la section sur la direc-*

trice indéfinie de ces plans, est toujours un cercle dont le plan est perpendiculaire à celui de la focale.

Soit $\alpha\alpha'$ une section par un plan perpendiculaire au petit axe d'un ellipsoïde par exemple, et soient F_2, F'_2 les deux *foyers conjugués;* la perpendiculaire F_2P, abaissée du foyer F_2 sur le plan tangent à la surface en un point quelconque M de la section $\alpha\alpha'$, sera dans le plan des deux rayons vecteurs F_2M, F'_2M, puisque ce plan contient la normale à la surface au point M, et de plus, rencontrera le deuxième rayon vecteur F'_2M à une distance du point M égale au premier rayon vecteur F_2M, puisque ces deux rayons vecteurs sont également inclinés sur le plan tangent. Si donc on joint le pied P de la perpendiculaire F_2P au milieu N de la distance focale $F_2F'_2$, la ligne PN sera parallèle au deuxième rayon vecteur et égale à la demi-somme $\frac{r+r'}{2}$, qui est constamment $\frac{ax'}{\sqrt{a^2-c^2}}$. Or, si nous désignons par x, y, z les coordonnées de l'un quelconque des pieds P des perpendiculaires PF_2, la distance du point N, dont les coordonnées sont

$$x = 0, \quad y = y' \quad \text{et} \quad z = 0.$$

au point P, sera

$$\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + z^2},$$

et, par conséquent, nous voyons déjà que tous les points P appartiennent à la sphère qui a pour équation

$$(1) \qquad x^2 + (y - y')^2 + z^2 = \frac{ax'}{a^2 - c^2}.$$

Si nous nommons x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point de tangence M, le plan tangent aura pour équation

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1,$$

et l'on aura, pour déterminer la perpendiculaire F_2P, les équations

$$x - x' = \frac{c^2x_1}{a^2z_1}z, \quad y - y' = \frac{c^2y_1}{b^2z_1}z.$$

Par conséquent, les valeurs de x, y, z, communes à ces trois équations,

appartiendront au pied P de la perpendiculaire. D'ailleurs, on a, entre les ordonnées y_1 du point M et y' du foyer F_2, la relation

$$y_1 = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2}.$$

Si donc on élimine x_1, y_1, z_1 entre ces quatre équations, on aura une nouvelle équation en x, y, z qui appartiendra à une surface sur laquelle seront situés tous les points tels que P. Des trois dernières on déduit

$$y_1 = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2}, \quad z_1 = -\frac{c^2 y' z}{(y - y')(c^2 - b^2)} \quad \text{et} \quad x_1 = -\frac{a y'(x - x')}{(y - y')(c^2 - b^2)},$$

et, en substituant ces valeurs dans la première, on obtient

$$(2) \qquad x(x - x') + y(y - y') + z^2 + \frac{c^2 - b^2}{y'}(y - y') = 0,$$

équation d'une deuxième sphère qui passe par le point F_2 et par le point N, milieu de la distance focale $F_2F'_2$, car elle est vérifiée pour

$$x = x', \quad y = y', \quad z = 0,$$

ainsi que pour

$$x = 0, \quad y = y', \quad z = 0.$$

Elle a, d'ailleurs, son centre situé dans le plan des xy, qui est celui de la focale, et par conséquent le lieu de tous les points tels que, P étant l'intersection des sphères (1) et (2), notre théorème se trouve complétement démontré.

3. On pourrait déterminer directement le centre et le rayon de la sphère (2), mais on y parvient plus aisément de la manière suivante :

En retranchant les équations (1) et (2), on a la projection sur le plan des xy du cercle d'intersection des deux sphères, c'est-à-dire l'équation du diamètre de ce cercle,

$$xy'(x' - (y - y')(y'^2 + c^2 - b^2) = \frac{a(y' - y')}{a - b},$$

qui devient

$$(3) \qquad xy'(a^2 - c^2) - yx'(c^2 - b^2) = (a^2 + b^2 - c^2)xy'.$$

attendu que de l'équation de la focale

$$\frac{y'^2}{c^2 - b^2} - \frac{x'^2}{a^2 - c^2} = -1,$$

on déduit

$$y'^2 = c^2 - b^2 = \frac{c^2 - b^2}{a^2 - c^2} x'^2.$$

D'ailleurs, la tangente à la focale menée par le point F'_2, dont les coordonnées sont y' et x', a pour équation

$$\frac{y'y}{c^2 - b^2} - \frac{x'x}{a^2 - c^2} = -1,$$

et l'on s'assure aisément que les équations (3) et 4 appartiennent à deux droites perpendiculaires entre elles. On voit, en outre, que l'équation (3) est vérifiée par les valeurs

$$x = x', \quad \text{et} \quad y = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2}.$$

qui déterminent le point où le prolongement de l'ordonnée du foyer F_2 coupe l'axe de la section $\alpha\alpha'$. Donc enfin :

Si par le point N, milieu de la distance focale et centre de la première sphère, on mène une parallèle à la tangente à la focale passant par le deuxième foyer F'_2, cette droite contiendra, 1° le centre de la deuxième sphère au point où elle sera rencontrée par la perpendiculaire élevée sur le milieu de NF_2, et 2° le centre du cercle d'intersection des deux sphères au point où elle sera rencontrée par la perpendiculaire abaissée sur sa direction du point d'intersection de l'ordonnée du foyer F_2 et de l'axe de la section $\alpha\alpha'$.

4. Le même théorème et la même construction sont encore applicables aux deux paraboloïdes, mais seulement pour des sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe. Pour les autres sections, on a le théorème suivant :

Si dans un paraboloïde quelconque on fait une section $\alpha\alpha'$ par un plan parallèle à l'axe et perpendiculaire au plan d'une focale (un des plans diamétraux principaux), *puis que l'on mène par les différents*

points de cette section des plans tangents à la surface, le lieu des pieds de toutes les perpendiculaires, abaissées du FOYER CONJUGUÉ *sur la direction indéfinie de tous ces plans, est une droite perpendiculaire au plan de la focale et passant par le milieu de la distance du foyer conjugué au pied de l'axe directeur correspondant.*

Soient x', y' les coordonnées du foyer F_2, et x_1, y_1, z_1 celles d'un point quelconque M de la section $\alpha\alpha'$ d'un paraboloïde elliptique par un plan parallèle à l'axe et perpendiculaire au plan diamétral principal dont la section a le plus grand paramètre. On aura entre y_1 et y' la relation

$$y_1 = \frac{py'}{p-p'}$$

et la perpendiculaire abaissée du foyer F_2 sur le plan tangent en M aura pour équations

$$x - x' = \frac{p}{z}(y - y'), \qquad y - y' = \frac{py'}{p'z}.$$

Si entre ces trois équations on élimine y_1 et z_1, on aura une nouvelle équation en x, y, z qui contiendra toutes les perpendiculaires abaissées du foyer F_2 sur les différents plans tangents à la surface en chacun des points de la section $\alpha\alpha'$. Pour cela, je substitue, dans la troisième équation, les valeurs de y_1 et z_1 fournies immédiatement par les premières, et j'obtiens

$$(y - y')(p - p') - (x - x')y' = 0,$$

équation d'un plan perpendiculaire à celui de la focale passant par le foyer F_2 et contenant l'axe directeur. Elle est, en effet, vérifiée pour

$$x = x', \qquad y = y',$$

coordonnées du foyer, et pour

$$x = x' - p', \qquad y = \frac{py'}{p'-p},$$

coordonnées du pied de la directrice.

D'ailleurs, une certaine perpendiculaire F_2P rencontre l'axe di-

recteur en un point G situé sur la parallèle à l'axe de la surface menée par le point M, et l'on a

$$MF_2 = MG;$$

de plus, le plan tangent divise en deux parties égales l'angle de ces deux droites. Donc il passe par le milieu de sa perpendiculaire F_2G, et, par suite, le lieu des pieds de toutes ces perpendiculaires est une droite parallèle à l'axe directeur et passant par le milieu de la distance F_2D_2.

5. Le lieu de toutes ces droites est évidemment une surface cylindrique dont la base, située dans le plan de la focale, est le lieu des droites qui joignent les différents points de la focale aux pieds des axes directeurs correspondants. Or les coordonnées de l'un de ces points, de celui qui correspond au foyer F_2, sont

$$\xi = x' - \frac{p'}{2} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y'}{2} - \frac{py'}{2(p-p')},$$

d'où l'on déduit

$$x' = \xi + \frac{p'}{2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{2\eta(p-p')}{2p-p'}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la focale qui est

$$y'^2 = (p-p')(2x'-p'),$$

on obtient

$$\eta^2 = \frac{(2p-p')}{p-p'}\xi,$$

équation d'une parabole qui a même sommet que le paraboloïde.

6. *Si dans une surface quelconque du deuxième ordre on fait une section par un plan perpendiculaire à l'un des axes, et que, par un point de cette section, on mène un plan tangent à la surface, le rectangle des perpendiculaires, abaissées des deux foyers conjugués à la section sur ce plan tangent, reste constant quel que soit le point de la section par lequel on a mené le plan tangent; et, lorsqu'on passe d'une section à une section parallèle, ce rectangle varie proportionnellement au carré de la distance des deux foyers conjugués correspondants.*

Considérons toujours la section $\alpha\alpha'$ faite sur un ellipsoïde par un

plan perpendiculaire au petit axe, et soient x', y' les coordonnées du foyer conjugué F_2, celles du deuxième foyer F'_2 seront $-x'$, y', et nous aurons pour la longueur des perpendiculaires d, d' abaissées de ces deux points sur un plan tangent en un point $x_1 y_1 z_1$ quelconque de la surface

$$d = \frac{\frac{x'x_1}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}, \quad d' = \frac{-\frac{x'x_1}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}.$$

Les coordonnées du point de tangence satisfont à la relation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1.$$

et pour exprimer que ce point appartient à la section $\alpha\alpha'$, dont F_2 et F'_2 sont les foyers conjugués, on a les deux relations

$$y_1 = -\frac{by'}{c-b}, \quad \frac{y'}{c-b} = \frac{x'}{a-c} = -1;$$

d'où l'on déduit aisément

$$\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = \frac{x'^2}{c^2(a-c)} - \frac{x_1^2}{a^2c} \quad \text{et} \quad y_1 y' = 1 - \frac{x'}{a-c}.$$

Or, on a

$$dd' = \frac{\left(\frac{y'y_1}{b^2} - 1\right)^2 - \frac{x'x_1}{a^2}}{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}} = \frac{\frac{x'^2}{(a^2-c^2)} - \frac{x'x_1}{a^2}}{\frac{x'^2}{a^2-c^2} - \frac{x_1^2}{a^2c}}.$$

et, par suite,

$$dd' = \frac{c^2x'^2\left[\frac{x'}{a-c} - \frac{x_1^2}{a^2}\right]}{(a-c)\left[\frac{x'^2}{a-c} - \frac{x_1^2}{a^2}\right]} = \frac{c^2x'}{a^2-c}.$$

Par un calcul tout à fait semblable, on trouve pour le paraboloïde

$$dd' = \frac{p'y'^2}{p-p'},$$

et, par conséquent, dans toute surface du deuxième ordre, le rec-

tangle dd' varie proportionnellement au carré de la demi-distance des foyers F_2, F'_2.

7. Si nous désignons par r et r' les deux rayons vecteurs menés du point M aux deux foyers conjugués, on a, dans l'ellipsoïde,

$$\frac{r+r'}{2} = \frac{ax'}{\sqrt{a^2-c^2}},$$

et, par suite,

$$dd' : \left(\frac{r+r'}{2}\right)^2 :: c^2 : a^2.$$

Dans le paraboloïde,

$$\frac{r+r'}{2} = y'\sqrt{\frac{p}{p-p'}},$$

d'où résulte

$$dd' : \left(\frac{r+r'}{2}\right)^2 :: p' : p.$$

8. En ajoutant les deux valeurs de d et d' du n° **6**, on trouve facilement

$$\frac{d+d'}{2} = \frac{\frac{y_1 y'}{b^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2}}} = \frac{\frac{ax'}{a^2-c^2}}{\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a}\left[\frac{a^2x'^2}{(a^2-c^2)^2} - x_1^2\right]}}.$$

D'ailleurs, si l'on fait le rectangle des deux rayons vecteurs r et r', on trouve immédiatement

$$rr' = \frac{a^2-c^2}{a^2}\left[\frac{a^2x'^2}{(a^2-c^2)^2} - x_1^2\right],$$

et, par suite, on a

$$rr' - \left(\frac{d+d'}{2}\right)^2 = \frac{a^2c^2x'^2}{(a^2-c^2)^2}.$$

On trouve aussi

$$dd' - \left(\frac{r+r'}{2}\right)^2 = \frac{a^2c^2x'^2}{(a^2-c^2)^2}.$$

et par conséquent

$$\frac{d+d'}{2} : \frac{r+r'}{2} :: \sqrt{dd'} : \sqrt{rr'};$$

c'est-à-dire que :

Si l'on mène un plan tangent à une surface du deuxième ordre en un point M quelconque et que l'on joigne ce point aux deux foyers conjugués, puis que l'on abaisse de ces mêmes foyers des perpendiculaires sur le plan tangent, les moyennes arithmétiques des rayons vecteurs et des perpendiculaires seront constamment proportionnelles aux moyennes géométriques de ces mêmes lignes.

Ceci, du reste, est une conséquence facile à déduire géométriquement de ce que les rayons vecteurs r, r' sont situés dans le plan des deux perpendiculaires d, d' et également inclinés sur le plan tangent.

9. Abaissons du centre de l'ellipsoïde une perpendiculaire δ sur le même plan tangent, nous aurons

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}} = \frac{ac}{\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}\left[\frac{a^2x^2}{a^2-c^2} - x_1\right]}},$$

d'après les formules du n° 6.

En comparant cette valeur à celle du rectangle rr' du numéro précédent, nous avons

$$\delta^2 . rr' = a^2c^2,$$

ou bien

$$\delta : a :: c : \sqrt{rr'}.$$

relation qui a pareillement lieu dans une ellipse dont les demi-axes sont a et c.

10. Désignons par n la longueur comptée sur la normale à partir du point de tangence M jusqu'à celui où cette droite rencontre le plan de la focale. On a

$$n = \sqrt{\frac{c^2x_1^2}{a^4} + (y_1 - y')^2 + z_1^2},$$

et si l'on remplace dans cette expression z_1, y_1 et y' par leurs valeurs

(n° 6), on trouve aisément

$$n^2 = \frac{c^2 a^2 - c^4}{a^2}\left[\frac{a^2 x'^2}{a^2 - c^2} - x_1^2\right].$$

On en déduit

$$(1) \qquad \frac{n^2}{rr'} = \frac{c^2}{a^2}, \qquad \text{ou bien} \qquad a : c :: \sqrt{rr'} : n.$$

Pour un paraboloïde on trouve, par un calcul en tout semblable,

$$(2) \qquad \frac{n^2}{rr'} = \frac{p'}{p}.$$

Donc, si nous appelons la quantité désignée par n la longueur de la normale, on voit que :

Dans toute surface du deuxième ordre le carré de la longueur de la normale en un point quelconque reste dans un rapport constant avec le rectangle des deux rayons vecteurs menés de ce même point aux deux foyers conjugués.

11. En désignant par ν l'angle de la normale avec chacun des deux rayons vecteurs menés d'un point M quelconque aux deux foyers conjugués, nous avons trouvé

$$\text{tang } \nu = \frac{a^2 - c^2}{b^2 c x'} \sqrt{b^4 z_1^2 + c^4 y_1^2}.$$

Or, si nous remplaçons dans cette formule z_1 et y_1 par leurs valeurs (6), nous avons

$$\text{tang } \nu = \frac{a^2 - c^2}{c x'} \sqrt{\frac{x'^2}{a^2 - c^2} - \frac{x_1^2}{a^2}}.$$

et nous en déduisons

$$\cos^2 \nu = \frac{c^2 x'^2}{\frac{(a^2 - c^2)^2}{a^2}\left[\frac{a^2 x'^2}{a^2 - c^2} - x_1^2\right]}.$$

En multipliant cette valeur par celle de n^2 du numéro précédent, on obtient

$$n \cos \nu = \frac{c^2 x'}{a\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Ainsi : *Dans toute surface du deuxième ordre douée d'un centre, la projection de la longueur de la normale en un point quelconque sur l'un des rayons vecteurs correspondants reste constante pour tous les points d'une même section faite par un plan perpendiculaire à l'un des axes, et varie, quand on passe d'une section à une autre section parallèle, proportionnellement à la distance des deux foyers conjugués.*

Pour la section principale dont les demi-axes sont a et c, on a

$$x' = \sqrt{a^2 - c^2},$$

et, par suite,

$$n \cos \varphi = \frac{c}{a},$$

relation connue et facile à obtenir directement pour une ellipse quelconque.

12. Soit V l'angle que fait la normale en un point quelconque M d'un paraboloïde avec l'axe de cette surface, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{1}{pp'} \sqrt{p^2 z_1^2 + p'^2 y_1^2},$$

d'où résulte

$$\cos V = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y_1^2}{p^2} + \frac{z_1^2}{p'^2}}}.$$

Or, si l'on remplace z_1 par sa valeur tirée de l'équation de la surface, et x_1 par sa valeur en fonction de l'abscisse x' des deux foyers conjugués à la section faite par un plan mené par le point M perpendiculairement à l'axe de la surface, on trouve aisément

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{\frac{2x' - p'}{p'} + \frac{y_1^2}{p(p-p')}}};$$

et comme, d'après l'équation de la focale,

$$2x' - p' = \frac{y_1^2}{p - p'},$$

on obtient enfin

$$\cos \varphi = \frac{p}{\sqrt{\frac{p - p'}{p'} \left[\frac{p y_1^2}{(p - p')^2} + y_1^2 \right]}}$$

D'ailleurs, si l'on désigne par r et r' les deux rayons vecteurs menés du point M aux deux foyers conjugués, on a

$$rr' = \frac{p-p'}{p}\left[\frac{p^2y'^2}{(p-p')^2} - y_1^2\right],$$

et, par conséquent, il vient

$$rr'\cos^2 v = pp'.$$

Si nous multiplions cette équation par l'équation (2) du n° **10**, nous obtenons

$$n\cos v = p',$$

ce qui montre que : *Pour chaque point d'un paraboloïde quelconque, la projection de la normale sur l'axe de la surface est constamment égale au demi-paramètre de la section principale qui ne contient pas la seconde extrémité de la normale n.*

13. Représentons par R_1 et R_2 les deux rayons de courbure principaux en un point xyz quelconque d'une surface du second ordre; on sait que l'on a généralement

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

et

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

p, q, r, s et t désignant, selon l'usage, les dérivées partielles des deux premiers ordres de l'ordonnée z prises par rapport à x et y.

Pour l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on trouve

$$p = -\frac{c^2x}{a^2z}, \qquad q = -\frac{c^2y}{b^2z},$$

$$r = -\frac{c^2(a^2z + c^2x^2)}{a^4z^3}, \quad s = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}, \quad t = -\frac{c^2(b^2z - c^2y^2)}{b^4z^3}.$$

et, en substituant ces valeurs dans la première des deux formules

générales précédentes, on obtient

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{a^2z^2 + c^2x^2 + b^2z^2 + c^2y^2 - c^2x^2}{a^2b^2c^2z^2\left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2} = \frac{\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}}{a^2b^2c^2\left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2} = \frac{\delta^2}{a^2b^2c^2},$$

δ représentant la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent xyz.

La formule

$$\frac{1}{RR_1} = \frac{\delta^2}{a^2b^2c^2}$$

a été donnée par M. Dupin dans ses *Développements de Géométrie*. On y introduira les rayons vecteurs r', r en observant qu'on a (n° 9)

$$\delta^2 = \frac{a^2c^2}{rr'},$$

et, partant,

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{a^2c^2}{b^2rr'}.$$

Si nous posons

$$\frac{a}{b} = P \quad \text{et} \quad \frac{c}{b} = P',$$

nous aurons

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{PP'}{r^2r'^2}, \quad \text{ou bien} \quad r^2r'^2 = PP' \times R_1R_2.$$

Pour le paraboloïde elliptique, on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{p'}{z}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{p'y}{pz},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{p'}{z}, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{p'y}{pz}, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{2p'x}{pz},$$

et si l'on substitue ces valeurs dans la même formule, on trouve

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{1}{pp'\left(1 + \frac{y^2}{p^2} + \frac{z^2}{p'^2}\right)} = \frac{\cos^2 v}{pp'},$$

et comme

$$\cos^2 v = \frac{p^2p'^2}{r^2r'^2},$$

on obtient enfin

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{pp'}{r^2 r'^2}, \quad \text{ou bien} \quad r^2 r'^2 = pp' \times R_1 R_2.$$

Donc : *En chaque point d'une surface quelconque du deuxième ordre, le rectangle des deux rayons de courbure principaux est proportionnel au produit des carrés des deux rayons vecteurs menés de ce même point aux deux foyers conjugués correspondants.*

En admettant, avec M. Gauss, que la courbure d'une surface en un point quelconque soit mesurée par la fonction $\frac{1}{R_1 R_2}$, on voit qu'en chaque point d'une surface quelconque du deuxième ordre la courbure est également mesurée par l'inverse du produit des carrés des deux rayons vecteurs menés de ce point aux deux foyers conjugués correspondants.

14. Si l'on substitue les mêmes valeurs de p, q, r,... dans la deuxième formule générale du numéro précédent, on aura, pour le paraboloïde d'abord,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\pm(p+p'+2x)}{pp'\left(1+\frac{x}{p}+\frac{x}{p'}\right)} = \pm\frac{p+p'+2x}{pp'}\cos^2 v;$$

d'où résulte

$$R_1 + R_2 = \pm\frac{p+p'+2x}{\cos v},$$

et, par suite,

$$R_1 \cos v + R_2 \cos v = \pm(p+p'+2x),$$

ce qui montre *qu'en chaque point d'un paraboloïde situé sur une section perpendiculaire à l'axe, la somme des projections des deux rayons de courbure principaux sur l'axe reste constante, et que pour chaque section, elle est égale à la somme des deux demi-paramètres principaux et du double de la distance du plan sécant au sommet de la surface.*

On trouve de la même manière, pour l'ellipsoïde,

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = -\frac{(z^2 a^2 b^2 + a^2 b^2 + x^2 b^2 c^2 + b^2 c^2 + y^2 (a^2 c^2 + a^2 c^2))}{a b c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{2 (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 b^2 z^2 + b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2) - a^2 b^2 c^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{a b c} ;$$

et si l'on nomme q la distance du centre de l'ellipsoïde au point xyz, on a enfin

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{2 (a^2 + b^2 + c^2 - q^2)}{a b c} ;$$

si l'on remplace dans cette formule $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ par la valeur du numéro précédent, on a

$$R_1 + R_2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - q^2}{2} .$$

formule que M. Dupin a aussi donnée.

15. Passons à un autre ordre de propriétés, et, pour cela, concevons un cône circonscrit à une surface du deuxième ordre. On sait que la courbe de contact est plane et que le plan de cette courbe est dit le plan POLAIRE correspondant au sommet S du cône, lequel est le POLE du même plan. Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un certain pôle S, le plan polaire correspondant, par rapport à l'ellipsoïde par exemple, aura pour équation

$$(P) \qquad \frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2} = 1 .$$

Considérons une droite quelconque représentée par les deux équations

$$(D) \qquad \begin{cases} x = mz + p, \\ y = nz + q, \end{cases}$$

et supposons que le pôle S soit situé sur cette droite, nous aurons

$$\xi = m\zeta + p , \quad \eta = n\zeta + q ,$$

et l'équation (P) devient

$$\frac{x}{a^2}(m\zeta + p) + \frac{y}{b^2}(n\zeta + q) + \frac{z\zeta}{c^2} = 1$$

Pour un deuxième pôle S′ situé en un point ξ', η', ζ', de la même droite, on trouvera pareillement

$$\frac{x}{a^2}(m\zeta' + p) + \frac{y}{b^2}(n\zeta' + q) + \frac{z\zeta'}{c^2} = 1;$$

et si l'on soustrait ces deux équations l'une de l'autre, il vient

$$(\mathrm{P}') \qquad \frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} + \frac{z}{c} = 0,$$

plan conjugué à la droite (D); par conséquent on a, pour déterminer la ligne d'intersection des deux plans polaires correspondants aux deux pôles S et S′, les deux équations (P) et (P′) qui sont, comme on voit, complétement indépendantes de la position de chacun des deux pôles S et S′ sur la droite (D); ainsi les différents points d'une droite quelconque étant considérés comme des pôles, tous les plans polaires correspondants se coupent suivant une seule et même droite située dans le plan diamétral conjugué à la droite des pôles S et S′.

16. Pour obtenir la projection de cette droite sur le plan focal, j'élimine z entre les deux équations (P) et (P′), ce qui me donne l'équation

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1.$$

p et q représentant les coordonnées du point où la droite (D) rencontre le plan des xy, et par conséquent la droite représentée par l'équation (I) est *polaire* du pied de la droite (D) par rapport à la section principale de l'ellipsoïde faite par le plan focal des xy.

17. Supposons maintenant que la droite (D) menée par le pôle S soit perpendiculaire au plan polaire correspondant (P), les équations de cette droite seront

$$x - \xi = \frac{\xi a^2}{\zeta a^2}(z - \zeta), \quad y - \eta = \frac{\eta b^2}{\zeta b^2}(z - \zeta),$$

et l'on aura, pour les coordonnées du point où elle rencontre le plan des xy,

$$p = \frac{\xi a^2 - c^2}{a^2}, \quad q = \frac{\eta b^2 - c^2}{b^2}.$$

Par suite, l'équation (1) deviendra

$$\frac{y_0^2(c^2-b^2)}{b^2} - \frac{x_0^2(a^2-c^2)}{a^2} = -1.$$

En comparant cette équation à celle de la synfocale

$$\frac{y^2(c^2-b^2)}{b^2} - \frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2} = -1,$$

on voit que la même projection de la droite d'intersection des différents plans polaires correspondants aux points de la droite (D) est la *polaire* par rapport à la synfocale de la projection sur le plan focal des xy du pôle S par lequel on a mené la droite (D) perpendiculaire sur le plan polaire correspondant. Donc généralement :

Un point S *étant considéré comme le pôle d'un plan* P *par rapport à une surface quelconque du deuxième ordre, si de ce pôle on abaisse une perpendiculaire indéfinie sur le plan polaire correspondant* P, *puis que l'on considère un nouveau point* S' *quelconque de cette perpendiculaire et le plan polaire* P' *correspondant, les deux plans polaires* P *et* P' *se couperont suivant une droite invariable, dont la projection sur le plan focal sera* POLAIRE *à la fois de la projection sur le même plan du premier pôle* S *par rapport à la synfocale, et du pied de la perpendiculaire* D *par rapport à la section principale correspondante de la surface.*

18. Si nous supposons le pôle S situé sur la surface proposée, le plan polaire correspondant devient le plan tangent, et la perpendiculaire D à ce plan est la normale à la surface en S. Du théorème précédent nous pouvons donc déduire le suivant que, du reste, on démontrerait directement de la même manière :

Si par un point M *quelconque d'une surface du deuxième ordre on mène le plan tangent et la normale, puis que l'on circonscrive à cette même surface un cône ayant pour sommet un point quelconque de la normale, le plan de la ligne de contact* (plan polaire du sommet du cône) *rencontrera le plan tangent suivant une droite invariable dont la projection sur le plan focal sera* POLAIRE *à la fois de la projection sur le même plan du point de tangence* M *par rapport à la synfocale*

et du pied de la normale par rapport à la section principale correspondante de la surface proposée.

19. La trace du plan polaire (P) sur le plan de la focale a pour équation

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1.$$

Or, p et q désignant les coordonnées du point où la perpendiculaire, abaissée du pôle S sur ce plan, coupe celui de la focale, on a

$$\xi = \frac{a^2 p}{a^2 - c^2}, \quad \eta = \frac{b^2 q}{b^2 - c^2},$$

et, par suite, la trace du plan polaire devient

$$\frac{qy}{c^2 - b^2} - \frac{px}{a^2 - c^2} = -1,$$

équation de la polaire du point (pq) par rapport à la focale.

Donc : *Si d'un point quelconque* S, *considéré comme pôle par rapport à un plan* P, *on abaisse une perpendiculaire* (D) *sur ce plan, la trace du plan* P *sur le plan focal sera la polaire, par rapport à la focale, de la trace de la perpendiculaire* D *sur ce même plan.*

Et par conséquent : *Si l'on mène à une surface du deuxième ordre un plan tangent et une normale en un même point quelconque* M, *la trace du plan tangent sur le plan d'une focale sera polaire par rapport à cette courbe, du pied de la normale.*

20. Revenons à la droite (D) du n° **15**, et supposons qu'elle passe par un point quelconque D_1 de la synfocale. En désignant par x' et y' les coordonnées du foyer conjugué F_1, on aura, pour le point D_1,

$$p = X = \frac{a^2 x'}{a^2 - c^2} \quad \text{et} \quad q = Y = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (I) du n° **16**, on trouve

$$\frac{yy'}{c^2 - b^2} - \frac{xx'}{a^2 - c^2} = -1,$$

équation de la tangente à la focale au point $x'y'$ de cette courbe.

Si l'on supposait, au contraire, la droite (D) menée par un point $x'y'$ de la focale, on aurait, en désignant par X et Y les coordonnées du point conjugué D_1 de la synfocale,

$$p = x' = \frac{X(a-c)}{a^2}, \quad q = y' = \frac{Y(c-b)}{b^2},$$

et, par suite, l'équation (I) deviendrait

$$\frac{Yy(c-b)}{b^2} - \frac{Xx(a-c)}{a^2} = -1,$$

équation de la tangente à la synfocale au point D_1 de cette courbe.

Donc généralement : *Le point* S *étant un pôle et* P *le plan polaire correspondant par rapport à une surface quelconque du deuxième ordre, si le pôle* S *se meut dans l'espace en restant constamment sur une droite* D *menée par un point* D_1 *de la synfocale, le plan polaire* P *tournera autour d'une droite fixe dont la projection sur le plan focal sera tangente à la focale au foyer* F_1 *conjugué du point* D_1 *de la synfocale; et réciproquement, si la droite* D, *lieu des pôles, passe par le foyer* F_1, *la ligne d'intersection des plans polaires se projettera sur la tangente à la synfocale au point* D_1 *conjugué du foyer* F_1.

21. Si nous considérons le cas où le pôle S coïncide avec le point F_1, intersection de la focale et de la droite D, le plan polaire correspondant, évidemment perpendiculaire au plan focal, déterminera par sa trace sur ce plan la projection de la droite fixe du théorème précédent. D'ailleurs, cette même intersection, tangente à la synfocale au point D_1, sera polaire du foyer conjugué F_1 par rapport à la section principale correspondante de la surface. Il en sera de même quand on supposera le pôle S situé au point D_1 de la synfocale.

Donc généralement : *Les différents points d'une focale d'une surface quelconque du deuxième ordre étant considérés comme des pôles par rapport à la section principale correspondante de la surface, la synfocale est* L'ENVELOPPE *de toutes les polaires correspondantes; et réciproquement, la focale est* L'ENVELOPPE *de toutes les polaires des différents points de la synfocale considérés comme pôles par rapport à la même section principale de la surface.*

22. Si nous supposons que la droite D soit l'axe directeur lui-même, on aura, pour les deux coordonnées ξ, η du pôle S situé en un point quelconque de cette droite,

$$\xi = \frac{a^2 x'}{a^2 - c^2}, \quad \eta = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2},$$

et, par conséquent, la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan polaire correspondant rencontrera le plan de la focale au point qui a pour coordonnées

$$p = \frac{\xi(a^2 - c^2)}{a^2} = x' \quad \text{et} \quad q = \frac{\eta(b^2 - c^2)}{b^2} = y',$$

c'est-à-dire au point F_1 de la focale, foyer conjugué du pied D_1 de l'axe directeur qui contient le pôle S.

D'ailleurs, les équations (P) et (P') du n° **15** se réduisent à

$$\frac{yy'b^2}{c^2 - b^2} - \frac{xx'a^2}{a^2 - b^2} = -1 \quad \text{et} \quad z = 0;$$

par conséquent, la ligne d'intersection des différents plans polaires correspondants aux divers points de la directrice DD_1 est la tangente à la focale aux points F_1.

Donc généralement : *Si un point* S, *considéré comme pôle d'un plan* P *par rapport à une surface du deuxième ordre, se déplace en occupant successivement les différents points d'un axe directeur quelconque* DD_1, *tous les plans polaires correspondants se couperont suivant la tangente à la focale au foyer conjugué* F_1, *et la droite qui unira ce point à un pôle quelconque* S *sera perpendiculaire au plan polaire correspondant.*

23. Lorsque le pôle S occupera le pied D_1 de la directrice, c'est-à-dire un point de la synfocale, le plan polaire correspondant sera visiblement perpendiculaire au plan de cette courbe, et, par conséquent, du théorème précédent résulte le théorème suivant, démontré par M. Cauchy (voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XIV, page 809 et suivantes) :

Le foyer F_1 *coïncide toujours avec le pied de la perpendiculaire abais-*

vée du pôle D_1 point conjugué de la synfocale *sur le plan polaire correspondant à ce même pôle.*

Nous voyons, en outre, que la droite qui joint chaque point D_1 de la synfocale au foyer conjugué F_1 est normale à la synfocale en ce point.

24. Soit S un pôle quelconque dont je représente les coordonnées par ξ, η, ζ; le plan polaire correspondant P coupera l'axe directeur DD, en un point D'_1 qui aura pour coordonnées

$$X = \frac{a x'}{a - c}, \quad Y = -\frac{b y'}{c^2 - b}, \quad Z = \frac{c}{\zeta}\left(1 - \frac{\xi x'}{a - c} + \frac{\eta y'}{c - b}\right).$$

x', y' représentant les coordonnées du foyer conjugué F_1. Or, menons de ce dernier point deux droites, l'une au pôle S, et l'autre au point D'_1, intersection du plan polaire et de l'axe directeur : elles auront pour équations

$$F_1S \qquad x - x' = \alpha z, \quad y - y' = \beta z,$$

$$F_1D'_1 \qquad x - x' = \alpha' z, \quad y - y' = \beta' z,$$

avec

$$\alpha = \frac{\xi - x'}{\zeta}, \quad \beta = \frac{\eta - y'}{\zeta}.$$

et

$$\alpha' = \frac{\frac{\eta y'}{c - b}}{1 - \frac{\xi x'}{a - c} - \frac{\eta y'}{c - b}}, \quad \beta' = \frac{\frac{\eta y'}{c - b}}{1 - \frac{\xi x'}{a^2 - c} - \frac{\eta y'}{c - b}};$$

et si l'on substitue ces valeurs de α, α', β et β' dans la formule qui exprime la perpendicularité de deux droites, on trouve

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + 1 = \frac{\frac{y'}{c - b} - \frac{x'}{a - c} - \frac{\eta y'}{c - b} + \frac{\xi x'}{a^2 - c}}{1 - \frac{\xi x'}{a - c} - \frac{\eta y'}{c - b}} + 1 = -1 + 1 = 0,$$

attendu que, d'après l'équation de la focale,

$$\frac{y'}{c - b} - \frac{x'}{a - c} = -1$$

Donc généralement : *Si l'on conçoit un cône circonscrit à une surface du deuxième ordre, et que l'on prolonge le plan de la ligne de contact jusqu'à ce qu'il coupe l'axe directeur* DD_1 *en un point* D'_1, *les deux droites qui joignent ce point et le sommet* S *du cône au foyer* F_1 *correspondant se coupent toujours à angle droit, quelle que soit la position du cône circonscrit.*

25. Lorsque le point S est situé sur la surface, le plan polaire correspondant est le plan tangent, et par conséquent :

Etant mené le plan tangent en un point M *quelconque d'une surface du deuxième ordre, le rayon vecteur qui joint le point de contact* M *à un point quelconque* F_1 *de la focale est perpendiculaire à la droite menée de ce même point* F_1 *à celui où le plan tangent coupe l'axe directeur correspondant.*

26. Concevons un cône circonscrit à une surface du deuxième ordre et ayant le point S pour sommet, le plan de la ligne de contact convenablement prolongé coupera en un point D'_1 l'axe directeur correspondant au foyer F_1 ; il coupera généralement aussi en deux points M et M′ la section $\alpha\alpha'$ de la surface *conjuguée* au foyer F_1. Menons la droite $F_1D'_1$ et un plan perpendiculaire à cette droite passant par le sommet du cône et le foyer F_1, la droite suivant laquelle ce plan coupera le plan $MM'F_1$ et la droite $F_1D'_1$ diviseront respectivement en parties égales l'angle et le supplément de l'angle des deux rayons vecteurs MF_1 et $M'F_1$.

En effet, les deux distances MD'_1 et $M'D'_1$, visiblement proportionnelles aux perpendiculaires abaissées des points M et M′ sur l'axe directeur DD'_1, sont par conséquent aussi proportionnelles aux deux rayons vecteurs MF_1 et $M'F_1$, et par conséquent la droite $F_1D'_1$ intercepte sur la base du triangle $MM'F_1$ des segments proportionnels aux côtés. D'ailleurs, cette même droite est perpendiculaire à la ligne d'intersection du plan du triangle $MM'F_1$ et du plan que nous avons mené perpendiculairement à sa propre direction par les points F_1 et S. Donc, etc.

De plus, cette intersection du plan du triangle $MM'F_1$ par celui que nous avons mené est la projection sur le premier de la droite SF_1, et par conséquent aussi :

La droite qui joint le sommet S *du cône au foyer* F_1 *fait, dans l'espace, des angles égaux avec les deux rayons vecteurs* MF_1 *et* $M'F_1$.

Si nous supposons le sommet S du cône situé dans le plan du triangle MF_1M', la droite SF_1 se confondra avec sa projection sur ce plan, et l'on démontrera aisément que :

Toute tangente à la surface, comprise entre les deux tangentes MS *et* M'S, *sera vue du foyer* F_1 *sous un angle constamment égal à la moitié de l'angle des deux rayons vecteurs* MF_1 *et* $M'F_1$.

27. Admettons que le sommet S du cône circonscrit coïncide avec le point F_1 de la focale, le plan polaire correspondant contiendra l'axe directeur DD_1 conjugué au foyer F_1, et chaque génératrice F_1M du cône circonscrit sera perpendiculaire à la droite menée du même foyer F_1 au point où le plan tangent à la surface en M, lequel contiendra la génératrice F_1M, coupera l'axe directeur DD_1. Soit F_1M' une autre génératrice quelconque du même cône, et soit D' le point où le plan MF_1M' prolongé coupe l'axe directeur DD_1; de ce que les carrés des rayons vecteurs MF et M'F sont proportionnels aux rectangles des perpendiculaires abaissées des points M et M' sur les plans directeurs conjugués au foyer F_1 (*voir* notre premier Mémoire), on déduit aisément que ces mêmes rayons vecteurs sont proportionnels aux perpendiculaires abaissées des mêmes points M et M' sur l'axe directeur DD_1, et, par suite, aux deux distances MD' et M'D'. D'ailleurs, si l'on projette sur le plan MFM' la tangente F_1I, menée à la focale par le point F_1, la projection sera perpendiculaire sur la droite F_1D', et par conséquent divisera en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs F_1M et F_1M'. Donc aussi ces deux rayons vecteurs formeront des angles égaux avec la tangente F_1I, et par conséquent :

Chaque point F_1, *appartenant à une focale d'une surface du deuxième ordre, est le sommet d'un cône de révolution circonscrit à cette surface et ayant pour axe la tangente à la focale au même point.*

Nous sommes ainsi ramené au théorème de M. Steiner sur les focales.

28. Les résultats auxquels nous sommes parvenu peuvent servir à résoudre divers problèmes relatifs aux surfaces du deuxième ordre.

Nous en indiquerons l'application à quelques-unes des principales questions que l'on traite ordinairement en géométrie descriptive, et nous terminerons par un problème qui, nous le pensons du moins, n'a encore été résolu que pour des cas très-particuliers, celui de mener une normale à une surface du deuxième ordre par un point donné quelconque. (*Voyez* un Mémoire de M. Joachimstal sur les normales à l'ellipse et à l'ellipsoïde; Journal de M. Crelle, tome XXVI, deuxième cahier.)

29. PREMIER PROBLÈME. — *Connaissant le sommet* S *d'un cône circonscrit à une surface du deuxième ordre, déterminer le plan de la ligne de contact; et réciproquement, étant donné le plan de la ligne suivant laquelle un cône touche une surface, trouver le sommet de ce cône.*

1°. Je joins le point donné S à un point quelconque F_1 de la focale, et soit D_1 le point conjugué de la synfocale; je mène par le point F_1 un plan perpendiculaire à la droite SF_1, lequel coupera l'axe directeur $D_1D'_1$ en un point du plan cherché (n° **22**). On obtiendra de même deux autres points de ce plan, et le problème sera résolu.

2°. Soient F_1 un point pris arbitrairement sur la focale, D_1 le point conjugué de la synfocale, et $D_1D'_1$ l'axe directeur correspondant, qui coupe le plan donné en un certain point D'_1; j'unis ce point au foyer F_1 et je mène par ce dernier point un plan perpendiculaire à la droite $F_1D'_1$, ce plan contiendra le point cherché S. En répétant la même construction pour deux autres points de la focale, on aura trois plans dont l'intersection sera le point S.

30. DEUXIÈME PROBLÈME. — *Construire l'intersection d'une surface du deuxième ordre,* 1° *par un plan;* 2° *par une ligne donnée.*

1°. On peut considérer le plan donné comme étant celui de la ligne suivant laquelle la surface proposée est touchée par un cône circonscrit dont on pourra commencer par déterminer le sommet S. Soient un certain foyer F_1, D_1 le point conjugué de la synfocale et D'_1 le point d'intersection du plan donné par l'axe directeur correspondant; je construis la droite $F_1D'_1$ par laquelle je mène un plan parallèle à l'axe de la focale, et soit D'_1M la droite suivant laquelle ce plan coupe le

plan donné; je construis au point F_1 un plan perpendiculaire à la droite F_1D, lequel coupe la droite D'_1M en un certain point C. Je prends ensuite sur la même droite D'_1M deux points M et M′ tels que, les quatre segments MD'_1, M′K, MK et $M'D'_1$ formant une proportion harmonique, les deux points M et M′ appartiennent à la courbe cherchée. On obtiendra pareillement autant de points que l'on voudra, et, par suite, on pourra tracer la courbe elle-même.

Si le plan donné est perpendiculaire au plan focal, sa trace coupera la section principale correspondante de la surface suivant une droite qui sera l'un des axes de la courbe cherchée. Le deuxième axe sera une perpendiculaire mM au plan focal élevée par le milieu m du premier. On mènera donc par ce point m une parallèle à l'axe de la focale qui coupera la synfocale en un point D_1; on déterminera les deux foyers conjugués F_1 et F'_1, et l'on prendra sur la perpendiculaire mM un point M tel, que la somme des distances MF_1 et MF'_1 soit égale à $\frac{2ax'}{\sqrt{a^2 - c^2}}$, quantité facile à construire, puisque l'on connaît la distance $2x'$ des deux foyers F_1 et F'_1 : la longueur mM sera le deuxième axe de la courbe cherchée.

2°. Par la droite donnée on mènera un plan perpendiculaire à un plan focal, et l'on construira la courbe d'intersection de la surface par ce plan; les points cherchés seront ceux où cette courbe est rencontrée par la droite proposée.

31. TROISIÈME PROBLÈME. — *Mener un plan tangent à une surface du deuxième ordre,* 1° *par un point donné sur la surface;* 2° *passant par une droite donnée;* 3° *parallèle à un plan connu.*

1°. Soit M le point donné, on mènera par ce point un plan perpendiculaire au plan de la focale et parallèle à l'axe de cette courbe; la trace de ce plan coupera la synfocale en un point D_1 dont on construira les deux foyers conjugués F_1 et F'_1; on mènera les deux rayons vecteurs MF_1, MF'_1, et la bissectrice de l'angle $F_1MF'_1$ sera la normale à la surface au point M. Il ne restera plus qu'à construire le plan perpendiculaire à cette droite au point donné.

2°. Soit SS′ la droite donnée par laquelle on veut mener le plan tangent; je prends à volonté sur cette droite deux points S et S′ que je

considère comme les sommets de deux cônes circonscrits à la surface, et je détermine (premier problème) la ligne suivant laquelle se coupent les plans des lignes de contact de ces deux cônes avec la surface proposée. Les points où cette droite coupe la surface sont les points de contact, et le problème se trouve ramené au premier cas.

3°. On substitue aux deux cônes S et S′ deux cylindres ayant leurs génératrices respectivement parallèles à deux droites tracées arbitrairement dans le plan donné.

Pour obtenir le plan de la ligne de contact de la surface et d'un cylindre dont la génératrice est parallèle à une droite donnée, on prendra trois points à volonté sur la focale, on déterminera les points respectivement conjugués de la synfocale et l'on construira les trois axes directeurs correspondants; on déterminera l'intersection de chacune de ces droites avec un plan mené par le foyer conjugué perpendiculairement à la direction donnée de la génératrice du cylindre; on aura ainsi trois points du plan cherché. Donc, etc.

32. QUATRIÈME PROBLÈME. *Mener par un point donné quelconque une normale à une surface du deuxième ordre*

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point donné S, les coordonnés x_1, y_1, z_1 du point M où la normale coupe la surface, satisfont aux deux équations

$$\xi - x_1 = \frac{cx}{az}(\zeta - z_1),$$

$$\eta - y_1 = \frac{a^2y}{b^2x}(\xi - x_1).$$

Or, soient α, β les coordonnées du point inconnu N où la normale prolongée rencontre le plan de la focale, nous avons entre α, β et x_1, y_1, les relations

$$x_1 = \frac{a^2\alpha}{a^2 - c^2} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{b^2\beta}{b^2 - c^2}.$$

En substituant ces valeurs dans la deuxième des équations précédentes, on a le lieu des pieds des normales menées à la surface par les différents points d'une perpendiculaire abaissée d'un point S sur le

plan des xy. On trouve ainsi

$$(1)\qquad \alpha\xi(a^2 - b^2) = (a^2 - c^2)\xi\zeta + (c^2 - b^2)\eta\alpha,$$

hyperbole qui passe par le centre de la surface et qui a pour asymptotes des parallèles aux axes des x et des y.

On obtient de la même manière, pour le lieu des points d'intersection avec le plan des xz, de toutes les normales à la surface menée par les différents points d'une perpendiculaire abaissée du point S sur le même plan,

$$(2)\qquad \alpha\eta(a^2 - c^2) = (a^2 - b^2)\xi\eta + (b^2 - c^2)\zeta\alpha,$$

nouvelle hyperbole aussi facile à construire que la première. Concevons maintenant deux cônes ayant pour sommet commun le point donné S et pour bases respectives les hyperboles (1) et (2), la ligne d'intersection de ces deux cônes sera évidemment la normale cherchée. Pour construire cette ligne, on déterminera d'abord l'intersection du deuxième cône par le plan focal, ce qui donnera encore une hyperbole passant également par le centre de la surface. Le point d'intersection de cette dernière hyperbole et de la première sera la trace N sur le plan focal de la normale cherchée.

D'après la position du point donné S, que nous supposerons d'abord en dehors de chacun des trois plans diamétraux principaux de la surface, l'hyperbole (1) pourra être rencontrée en un point unique, en deux ou même en trois points, autres que le centre de la surface qui ne peut convenir à la question, par la trace du deuxième cône sur le plan de la focale; chacun de ces points sera généralement le pied d'une normale qui satisfera à l'énoncé.

Supposons le point donné S situé dans le plan focal, par exemple intérieurement à l'ellipsoïde. Soit SM une normale menée par ce point. le plan tangent en M aura pour trace sur le plan focal la polaire du point donné S par rapport à la focale (n° **19**). On tracera donc cette droite, et le problème sera ramené à construire un plan tangent passant par une droite connue. Comme on pourra mener par cette droite deux plans tangents à la surface, on aura aussi deux normales partant de S et se terminant en deux points M et M′ symétriquement placés sur

la section $\alpha\alpha'$ conjuguée aux points de la focale situés sur une parallèle à l'axe menée par le point S.

D'ailleurs, toute normale menée du point S à la courbe d'intersection de la surface par le plan focal sera aussi normale à la surface elle-même, et comme on peut généralement mener d'un point quatre normales à une section conique, on en obtiendra, dans ce cas, six pour la surface.

Si nous supposons enfin le point donné S, toujours dans le plan focal, mais placé de telle sorte que les foyers situés sur une parallèle à l'axe menée par ce point soient conjugués à une *section imaginaire* de la surface, il ne restera plus d'autres normales que celles que l'on pourra mener du point donné à l'intersection de la surface par le plan focal; et quant au problème de mener une normale à une section conique par un point donné, on connaît l'élégante construction donnée par M. Poncelet. Voir le *Traité des Propriétés projectives des figures*.

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME D'ANALYSE;

PAR M. WILLIAM THOMSON.

Nous nous proposons ici d'évaluer l'intégrale multiple, à n variables,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\frac{d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n}{[(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+\ldots+u^2]^{\frac{n-1}{2}}\,[(\xi_1-x'_1)^2+(\xi_2-x'_2)^2+\ldots+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

ou, comme on le peut écrire, pour la brièveté,

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\right]^n\frac{[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n-1}{2}}\,[\Sigma(\xi-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Nous représenterons la valeur cherchée par U.

Pour la trouver, soit $u+u'=a$, les quantités u et u' étant prises positivement, et posons

$$(1)\qquad R=\frac{1}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n-1}{2}}}-\frac{1}{[\Sigma(\xi-x)^2+(2u-a)^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

$$(2)\qquad R'=\frac{1}{[\Sigma(\xi-x')^2+(a-u)^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

d'où nous tirons

$$-2(n-1)\,u\,U=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\right]^n R'\,\frac{dR}{du}\,[d\xi]^n,\quad\text{quand}\quad u=a.$$

On voit que le second membre de cette équation s'évanouit quand

$v = \pm\infty$, et qu'il ne devient jamais infini, même quand v est égal à 0, $2u$, ou a. Ainsi, on peut écrire

$$-2(n-1)u\mathrm{U} = \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n\left(\frac{d\mathrm{R}'}{dv}\frac{d\mathrm{R}}{dv} + \mathrm{R}'\frac{d^2\mathrm{R}}{dv^2}\right)[d\xi]^n\,dv.$$

Mais on a

$$\int\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n\frac{d\mathrm{R}'}{dv}\frac{d\mathrm{R}}{dv}[d\xi]^n\,dv = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n\int\frac{d\mathrm{R}'}{dv}\frac{d\mathrm{R}}{dv}\,dv[d\xi]^2$$
$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n\mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}'}{dv}[d\xi]^n - \int\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n\mathrm{R}\frac{d^2\mathrm{R}'}{dv}[d\xi]^n\,dv.$$

En prenant l'intégrale par rapport à v entre les limites $-\infty$ et u, le premier terme s'évanouit puisqu'à chaque limite $\mathrm{R} = 0$. Ainsi l'équation précédente se réduit à

$$-2(n-1)u\mathrm{U} = \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n\left(\mathrm{R}'\frac{d^2\mathrm{R}}{dv^2} - \mathrm{R}\frac{d^2\mathrm{R}'}{dv^2}\right)[d\xi]^n\,dv.$$

Or on a

$$\frac{d^2\mathrm{R}'}{dv^2} + \sum\frac{d^2\mathrm{R}'}{d\xi^2} = 0,$$

équation qui est satisfaite pour toutes les valeurs de v entre les limites indiquées, puisque la valeur a n'y est pas renfermée. Combinant cette équation avec la précédente, on en conclut

$$-2(n-1)u\mathrm{U} = \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n\left(\mathrm{R}'\frac{d^2\mathrm{R}}{dv^2} + \mathrm{R}\sum\frac{d^2\mathrm{R}'}{d\xi^2}\right)[d\xi]^n\,dv.$$

En intégrant par parties un des termes de cette équation, on a

$$\int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n\mathrm{R}\frac{d^2\mathrm{R}'}{d\xi_{,}^2}[d\xi]^n\,dv$$
$$= \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^{n-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{R}\frac{d^2\mathrm{R}'}{d\xi_{,}^2}\,d\xi_{,}\right)[d\xi]^{n-1}\,dv$$
$$= -\int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^{n-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mathrm{R}'}{d\xi_{,}}\frac{d\mathrm{R}}{d\xi_{,}}\,d\xi_{,}\right)[d\xi]^{n-1}\,dv$$
$$= \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n\mathrm{R}'\frac{d^2\mathrm{R}}{d\xi_{,}^2}[d\xi]^n\,dv,$$

puisque, à chaque limite, les parties intégrées s'évanouissent. En

appliquant un procédé semblable à chaque terme contenu sous le signe Σ, il vient donc

$$-2(n-1)u\mathrm{U} = \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^{n} \mathrm{R}'\left(\frac{d^2\mathrm{R}}{dv^2} + \sum \frac{d^2\mathrm{R}}{d\xi^2}\right)[d\xi]^n\, dv.$$

Mais, en appelant Q et Q′ les deux parties de R dans l'équation (1), de sorte que $\mathrm{R} = \mathrm{Q} - \mathrm{Q}'$, nous avons

$$\frac{d^2\mathrm{Q}'}{dv^2} + \sum \frac{d^2\mathrm{Q}'}{d\xi^2} = 0$$

pour toutes les valeurs des variables v, ξ_1, etc., comprises entre les limites de l'intégration; ainsi il reste simplement

$$-2(n-1)u\mathrm{U} = \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^{n} \mathrm{R}'\left(\frac{d^2\mathrm{Q}}{dv^2} + \sum \frac{d^2\mathrm{Q}}{d\xi^2}\right)[d\xi]^n\, dv.$$

Pour déterminer la valeur de cette expression, nous observerons que la quantité sous les signes d'intégration s'évanouit pour toutes les valeurs des variables qui diffèrent sensiblement de celles exprimées par

$$v = 0, \quad \xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \text{etc.},$$

et que, d'ailleurs, si l'on considère séparément les termes du second membre, on trouve pour chacun une intégrale convergente; d'où il suit qu'en appelant P la valeur que R′ prend quand les variables ont ces valeurs, nous avons

$$(3) \quad -2(n-1)u\mathrm{U} = \mathrm{P}\int\!\!\int\!\!\int \cdots\left(\frac{d^2\mathrm{Q}}{dv^2} + \sum \frac{d^2\mathrm{Q}}{d\xi^2}\right) dv\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n,$$

où les limites des intégrations peuvent être quelconques, pourvu qu'elles comprennent les valeurs 0, x_1, x_2, etc. En considérant séparément les divers termes de cette expression, intégrant chacun d'eux une fois, en limitant l'intégration aux valeurs positives de la variable par rapport à laquelle l'intégration se fait, puis doublant le résultat, on obtient

$$(4) \quad -2(n-1)u\mathrm{U} = 2\mathrm{P}\left(\int\!\!\int \cdots \frac{d\mathrm{Q}}{dv}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots + \int\!\!\int \frac{d\mathrm{Q}}{d\xi}\, dv\, d\xi_2 \ldots + \text{etc.}\right)$$

Posons maintenant

$$\xi_1 = v_1 + x_1, \quad \xi_2 = v_2 + x_2, \quad \text{etc.},$$

et

$$v^2 + v_1^2 + \ldots + v_n^2 = r^2,$$

ce qui donne

$$Q = \frac{1}{r^{n-1}}, \quad \frac{dQ}{dv} = -\frac{n-1}{r^{n+1}}\, v, \quad \frac{dQ}{dv_1} = -\frac{n-1}{r^{n+1}}\, v_1, \quad \text{etc.}$$

Nous pourrons étendre les intégrations, dans l'équation (3), à toutes les valeurs positives ou négatives des variables données par l'inégalité

$$v^2 + v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 \overset{=}{<} a^2,$$

et puis, les limites dans l'équation (4) seront toutes les valeurs qui satisfont à l'équation

$$v^2 + v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = a^2, \quad \text{ou} \quad r^2 = a^2,$$

ce qui donne

$$\frac{dQ}{dv} = -\frac{n-1}{a^{n+1}}\, v, \quad \frac{dQ}{dv_1} = -\frac{n-1}{a^{n+1}}\, v_1, \quad \text{etc.}$$

Si, dans les intégrations, nous ne prenons que les valeurs positives des variables qui satisfont à l'équation des limites, il faudra multiplier chaque intégrale multiple par 2^n. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} nU &= \frac{2^n P}{a^{n+1}} \left(\iint \ldots v\, dv_1\, dv_2 \ldots dv_n + \iint \ldots v_1\, dv\, dv_2 \ldots dv_n + \text{etc.} \right) \\ &= \frac{2^n (n+1) P}{a^{n+1}} \iint \ldots (a^2 - v_1^2 - v_2^2 - \ldots - v_n^2)^{\frac{1}{2}}\, dv_1\, dv_2 \ldots dv_n \\ &= (n+1) P \iint \ldots (1 - l_1 - l_2 \ldots - l_n)^{\frac{1}{2}}\, l_1^{-\frac{1}{2}}\, l_2^{-\frac{1}{2}} \ldots l_n^{-\frac{1}{2}}\, dl_1\, dl_2 \ldots dl_n, \end{aligned}$$

où les limites comprennent les valeurs positives données par l'inégalité

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_n \overset{=}{<} 1,$$

ce qui, d'après un théorème de M. Liouville, se réduit à

$$uU = (n+1)P\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\int_0^1 (1-h)^{\frac{1}{2}}h^{\frac{n}{2}-1}\,dh = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}P.$$

En se rappelant que P est une fonction symétrique par rapport aux deux systèmes de variables u, x_1, x_2, etc., et u', x'_1, x'_2, etc., on voit que $uU = u'U'$, en désignant par U' la fonction qui correspond à U ; d'où il suit que

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & u\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n-1}{2}}\,[\Sigma(\xi-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}} \\ &= u'\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x')^2+u'^2]^{\frac{n+1}{2}}\,[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n-1}{2}}} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+(u+u')^2]^{\frac{n-1}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Nous ajouterons ici une autre démonstration de ce théorème comme exemple d'une analyse remarquable donnée par Green, dans son Mémoire [*] intitulé : *On the determination of the exterior and interior attractions of ellipsoids of variable densities.*

En effet, soit

$$(6)\quad V = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{u[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n-1}{2}}\,[\Sigma(\xi-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

ce qui est aussi égal à

$$-\frac{1}{n-1}\frac{d}{du}\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n-1}{2}}\,[\Sigma(\xi-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}\right\}.$$

[*] Lu à la Société philosophique de Cambridge, le 6 mai 1833. (*Transactions*, tome V.)

Par cette dernière forme on voit que l'équation

$$\frac{d^2V}{du^2} + \sum \frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

est satisfaite pour toutes les valeurs de x_1, x_2, etc., quand u n'est pas égal à zéro. Nous pouvons donc dire que pour toutes les valeurs de x_1, x_2, etc., et pour toutes les valeurs de u entre o et ∞, cette équation est satisfaite. Mais à ces limites il est bien facile de trouver la valeur de V, et c'est ce que nous allons maintenant faire, pour en déduire la valeur générale.

Quand $u = 0$, la quantité sous les signes d'intégration, dans l'expression V, s'évanouit pour toutes les valeurs de ξ_1, ξ_2, etc., qui ne sont pas égales à x_1, x_2, etc.; d'où il suit que, dans ce cas,

$$V = \frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{u[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2-u^2]^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{dz_1\,dz_2\ldots dz_n}{(1+z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \frac{1}{2^n} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots \frac{l_1^{-\frac{1}{2}} l_2^{-\frac{1}{2}} \ldots dl_1\,dl_2\ldots}{1-l_1-l_2-\ldots-l_n^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{\frac{n}{2} h^{\frac{n}{2}-1}\,dh}{1-h^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

De plus, quand $u = \infty$, la valeur de V est zéro.

Ainsi, on voit que V a la même valeur que l'expression

$$\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+(u+u')^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

quand $u = 0$, et quand $u = \infty$, pour toutes les valeurs de x_1, x'_1, x_2, etc., ce qui suffit pour en conclure que

$$V = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+(u+u')^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

pour toutes les valeurs positives de u. En effet, le second membre de cette équation satisfait à l'équation (7) pour toutes les valeurs positives de u, en supposant u' une quantité positive, et aux limites

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u = \infty$$

la même valeur que V; d'où il suit, par un théorème de Green, démontré dans le Mémoire cité ci-dessus, que l'équation (7) doit subsister pour toutes les valeurs de u entre ces limites.

On peut déduire, de ce que nous venons de démontrer, la solution du problème suivant :

Étant donnée, pour toutes les valeurs de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, la valeur de l'intégrale multiple

$$a. \qquad S \frac{\rho' dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n}{[(x'_1-\xi_1)^2+(x'_2-\xi_2)^2+\ldots+(x'_n-\xi_n)^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

où u' et ρ' sont des fonctions quelconques de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, soit proposé de trouver la valeur de

$$b. \qquad S \frac{\rho' dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n}{[(x'_1-x_1)^2+(x'_2-x_2)^2+\ldots+(x'_n-x_n)^2+(u'-u)^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des quantités quelconques, et u une quantité positive.

En effet, en dénotant l'expression (a) par φ', et l'expression (b) par φ, nous avons, par le théorème démontré ci-dessus,

$$\varphi = \frac{u\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \mathbf{S}\, \rho' dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi - x')^2 + u^2]^{\frac{n+1}{2}}\,[\Sigma(\xi - x'')^2 - u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$= \frac{u\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi - x')^2 + u^2]^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \mathbf{S} \frac{\rho' dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n}{[\Sigma(\xi - x'')^2 + u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

ou

$$(c) \qquad \varphi = \frac{u\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{\varphi' \cdot [d\xi]^n}{[\Sigma(\xi - x')^2 + u^2]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Mais, par hypothèse, φ' est donné pour toutes les valeurs de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; d'où il suit que l'équation (c) contient la solution du problème.

On peut aussi déduire de l'équation (5) l'expression

$$(d) \qquad \varphi = -\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n-1)\,\pi^{\frac{n-1}{2}}} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{\frac{d\varphi'}{du'} [d\xi]^n}{[\Sigma(\xi - x')^2 + u^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

par laquelle nous pouvons déterminer φ, quand on nous donne seulement la valeur de $\frac{d\varphi'}{du'}$.

Pour le cas particulier de

$$u' = 0,$$

ce théorème (d) est compris dans un théorème que Green a aussi donné, et où le nombre n qui entre dans l'exposant du dénominateur peut différer du nombre s des variables, la seule condition entre s et n étant

$$n - s - 1 > 0.$$

Mais c'est seulement dans le cas de

$$n = s$$

que le théorème général (d) a lieu.

Appliquons maintenant ces formules au cas de

$$n = 2,$$

et substituons x, y, z pour x_1, x_2, u, et ξ, η pour ξ_1, ξ_2.

Les équations (c) et (d) deviennent

$$(e) \qquad \varphi = \frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi'\, d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}},$$

et

$$(f) \qquad \varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{d\varphi'}{dz}\right) d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}},$$

où $\left(\frac{d\varphi'}{dz}\right)$ dénote la valeur de $\frac{d\varphi}{dz}$ dans le point $(\xi, \eta, 0)$.

La premiere de ces formules peut se déduire d'un théoreme tres-général que Green a donné dans son ouvrage intitulé : *Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism* [*].

On peut démontrer la seconde par la méthode suivante :

Considérons x', y', z' comme les coordonnées d'un point P', où il y a une quantité de matière $\rho'\, dx'\, dy'\, dz'$, attirante suivant la loi du carré inverse de la distance. La quantité φ sera le potentiel sur un point P $(x\, y\, z)$, *au-dessus* du plan (xy), d'une quantité de matiere M distribuée d'une manière quelconque *au-dessous* de ce plan ou sur le plan. Maintenant on sait, par un théorème que Gauss a donné le premier pour une surface quelconque, qu'il y a une distribution determinée d'une quantité de matière sur le plan (xy) qui produira le même potentiel que M, sur les points au-dessus de ce plan. Soit k la *densite*

[*] Nottingham, 1828. Cambridge, Deighton.

de cette distribution en un point $\Pi(\xi, \eta)$, de sorte que

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\,d\xi\,d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

ce qui donne

$$\frac{d\varphi}{dz} = -z\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\,d\xi\,d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Prenons maintenant $z = 0$, et soient k et $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_0$ les valeurs de k et de $\frac{d\varphi}{dz}$ au point $(x, y, 0)$. Nous avons

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_0 = -k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\,d\xi\,d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{quand} \quad z = 0.$$

$$= -k.2\pi,$$

puisque la valeur de l'intégrale dans le second membre est $= 2\pi$, quel que soit z; et nous concluons que

$$k = -\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dz}\right),$$

d'où l'équation (f) se trouve démontrée.

On doit remarquer ici que la quantité totale de la matière distribuée sur le plan xy est égale à la quantité M. dont elle est représentative, comme on peut le vérifier facilement.

Il existe aussi une application de ces formules à la théorie de la chaleur. En effet, soit φ la température permanente d'un point P, d'un solide infini, échauffé par des sources quelconques distribuées sur le plan xy, ou en dessous. Si la température de chaque point Π du plan xy est donnée, la formule $e)$ nous conduit à déterminer la température d'un point quelconque P au-dessus de ce plan. Par exemple, supposons que la température d'une partie A de ce plan a une valeur constante c, et que la température à chaque point du plan qui ne se trouve pas dans A est égale à zéro, et considérons la partie A comme limitée par deux droites parallèles à l'axe de y, et situées à des

distances égales à a, sur chaque côté de cet axe. Dans ce cas, la formule (e) devient

$$\varphi = \frac{\varkappa c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^{a} \frac{d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]}$$

$$= \frac{c}{\pi} \left(\text{arc tang } \frac{x + a}{z} - \text{arc tang } \frac{x - a}{z} \right)$$

$$= \frac{c}{\pi} \cdot \text{arc tang } \frac{2az}{x^2 + z^2 - a^2},$$

d'où nous concluons que les surfaces isothermes qui correspondent à ce cas sont des cylindres à base circulaire. Soit AA′ la ligne d'intersection de la partie A du plan xy avec le plan xz. Les bases des cylindres isothermes sont les segments de cercles décrits sur la droite AA′.

On peut remarquer que cette application que nous avons donnée, et toutes les autres qui se rapportent aux cylindres isothermes, peuvent être déduites des formules générales en prenant

$$n = -1$$

Paris, le 21 février 1847.

MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE

POUR

LES RAYONS DE COURBURE

D'UNE CERTAINE CLASSE DE COURBES;

PAR M. ABEL TRANSON.

I.

On doit à Descartes d'avoir remarqué que, pour la roulette engendrée par un point quelconque du plan d'une courbe qui roule sans glissement sur une autre courbe fixe, la normale passe à chaque instant par le point de contact des deux courbes.

M. Chasles a généralisé ce principe au moyen du théorème suivant :

« *Quand une figure plane éprouve un mouvement infiniment petit dans son plan, il existe toujours un point qui, pendant ce mouvement, reste fixe;*

» *Les droites menées par les différents points de la figure, perpendiculairement aux trajectoires qu'ils décrivent pendant le mouvement infiniment petit, passent toutes par ce point fixe.*

» D'après ce théorème, quand une courbe est décrite par un point d'une figure en mouvement dans son plan, il suffira, pour mener sa normale par le point décrivant, de déterminer le point qui restera fixe au moment du mouvement où le point décrivant aura la position qu'on considère. Ce point se déterminera par les différentes conditions du mouvement de la figure. »

M. Chasles, après avoir montré comment cette méthode s'applique à la courbe engendrée par le sommet d'un triangle lorsque les extré-

mités de la base parcourent deux droites fixes, ce qui donne une ellipse, ou même lorsque les deux directrices sont des courbes quelconques; comment elle s'applique à la conchoïde de Nicomède, etc., continue en ces termes :

« Ce qui précède suffira pour faire voir que le théorème que nous avons énoncé est une généralisation de l'idée de Descartes au sujet de la tangente à la cycloïde, et qu'il constitue une véritable méthode des tangentes, méthode différente de toutes les autres, et même de celle de Roberval, quoiqu'elle repose, comme celle-ci, sur des considérations de mouvement. Mais on conçoit que cette méthode, si facile, sera aussi, comme celle de Roberval, bornée dans ses applications, puisqu'elle suppose qu'on connaît les conditions géométriques du mouvement d'une figure de forme invariable, à laquelle appartient le point décrivant. Cependant elle s'applique à un grand nombre de courbes particulières et à des familles entières de courbes. » (Chasles, *Aperçu historique*, pages 548 et 549.

Les géomètres qui se sont occupés autrefois des roulettes (notamment Waring), ont connu non-seulement la tangente, mais aussi le rayon de courbure de ces courbes pour chaque position du point décrivant. Je rappellerai d'abord comment on peut construire ce rayon de courbure des roulettes, et de là je tirerai une construction qui s'étendra à toutes les courbes auxquelles s'applique la méthode des tangentes de M. Chasles.

II.

Je vais établir le rayon de courbure des roulettes en supposant que la courbe mobile et la courbe fixe se présentent leurs convexités respectives; un simple changement de signe dans la formule répondra à la circonstance opposée.

J'appelle r et r' les rayons de courbure des courbes (l'une fixe et l'autre mobile), au point de contact; ρ la distance du centre de courbure de la roulette à ce même point; et ρ' la distance du point décrivant aussi au point de contact; enfin i l'angle que fait la normale de la roulette avec la normale commune des deux courbes.

L'arc de roulette s'exprime d'abord en multipliant ρ' par l'angle

de rotation qui est la somme des deux angles de contingence, c'est-à-dire $\frac{ds}{r} + \frac{ds}{r'}$: s'exprime ensuite par le produit du rayon de courbure de la roulette (rayon égal à $\rho + \rho'$), multiplié par l'angle des deux normales consécutives, c'est-à-dire par $\frac{ds \cos i}{\rho}$. De cette double expression on déduit la formule très-simple

$$(\alpha_1) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \frac{1}{\cos i},$$

avec

$$(\beta_1) \qquad R = \rho + \rho' = \rho'^2 \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}{\rho'\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \cos i}.$$

pour exprimer le rayon de courbure de la roulette.

Pour l'exactitude de ces formules, il faut compter l'angle i entre les deux droites qui, partant du point de contact, vont, l'une au rayon de courbure de la courbe mobile, et l'autre au point décrivant: de sorte que $\cos i$ changera de signe quand cet angle sera obtus.

Si les courbes roulent dans la concavité l'une de l'autre, il faut changer, dans les formules précédentes, à la fois les signes de ρ' et de r', ce qui donne les formules correspondantes

$$(\alpha_2) \qquad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \frac{1}{\cos i}.$$

$$(\beta_2) \qquad R = \rho - \rho' = \rho'^2 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{\rho'\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) - \cos i}.$$

III.

Je ferai deux observations sur ces formules. Premièrement, si dans (α_1) on suppose $r' = r$, on aura, pour la roulette engendrée par un point quelconque du plan d'une courbe qui roule sur une autre courbe identique,

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{2}{r \cos i}.$$

Or telle est précisément, comme on sait, la relation entre les deux distances conjuguées ρ' et ρ, dans la réflexion de la lumière.

Rappelons ici le beau théorème de M. Quetelet sur la caustique (par réflexion). C'est la développée d'une courbe que ce géomètre appelle *caustique secondaire*, et qui est l'enveloppe d'une suite de cercles ayant leurs centres sur la courbe réfléchissante, et passant tous par le foyer lumineux.

Eh bien, il résulte du rapprochement ci-dessus que la caustique secondaire (dans le cas de la réflexion) n'est autre chose que la roulette que décrirait le point lumineux si l'on faisait rouler sur elle-même la courbe réfléchissante. J'ignore si cela avait été remarqué, et d'ailleurs cela se voit directement et sans l'aide de la formule ci-dessus.

Pareillement, dans le cas des rayons incidents non issus d'un point unique, mais normaux à une courbe déterminée, on sait que la caustique secondaire est enveloppe de tous les cercles ayant leurs centres sur la courbe réfléchissante et qui touchent la courbe en question. On peut dire que la caustique secondaire est aussi l'enveloppe de toutes les positions que prend la courbe normale au faisceau lumineux si on la suppose entraînée dans le roulement de la courbe réfléchissante sur elle-même.)

La seconde observation sur les formules ci-dessus est relative au rayon de courbure de l'ellipse. On sait que cette courbe est engendrée par un point du plan d'un cercle de diamètre égal à la somme, ou à la différence, de ses demi-axes, tournant intérieurement sur un cercle de diamètre double. On appliquera donc la formule z_2, et on trouvera une construction extrêmement simple pour le rayon de courbure de l'ellipse; formule que j'ai communiquée à la Société philomatique (séance du 30 novembre 1844) et insérée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* pour décembre.

Soient T le point décrivant et O le point actuel du contact, de sorte que TO est la longueur représentée par ρ' dans la formule; on a d'ailleurs

$$r' = \frac{r}{2};$$

et il vient

$$R = \frac{\overline{TO}}{TO - r\cos t}.$$

De plus, si on projette le centre du cercle fixe sur la direction de la normale TO; soit C le pied de la perpendiculaire projetante, on aura

$$TC = TO - r\cos i;$$

de sorte que le rayon de courbure de l'ellipse décrite par le point T est une troisième proportionnelle aux lignes TC et TO.

IV.

Maintenant, pour en venir à l'objet de cette Note, puisqu'on a une méthode pour construire les rayons de courbure de toutes les roulettes, n'est-il pas naturel de chercher si le principe sur lequel elle repose serait susceptible de quelque généralisation qui le rende applicable à d'autres questions?...

Or il est facile de voir que *si une figure plane possède dans son plan un mouvement soumis à certaines conditions géométriques, le même mouvement pourra toujours être représenté par le roulement d'une certaine courbe sur une autre courbe supposée fixe.*

D'après ce principe, quand une courbe est décrite par un point d'une figure en mouvement dans son plan, il suffira, pour construire son rayon de courbure, de savoir construire les deux courbes qui sont propres à diriger ce même mouvement, c'est-à-dire, premièrement, la courbe fixe, et ensuite, pour chaque situation du point décrivant, la courbe mobile;

Ou, beaucoup plus simplement : il suffira de connaître, pour chaque situation du point décrivant, celle du point de contact des deux courbes, la position de leur normale commune et leurs rayons de courbure en ce point.

La courbe fixe est facile à construire; c'est le lieu des points qui restent fixes successivement dans tous les déplacements infiniment petits du point décrivant; autrement, c'est le lieu de ces mêmes points à l'aide desquels M. Chasles enseigne la construction de la normale.

Pour avoir la courbe mobile, il faut d'abord renverser les conditions du mouvement, comme fait le même géomètre pour établir la *loi de dualité* relative à l'art du tourneur (*Aperçu*, page 409). Je ne puis mieux faire que transcrire ses expressions :

« *Quand une figure plane est en mouvement dans son plan, l'un de ses points décrit une courbe.*

» *Le mouvement de cette figure est déterminé par des relations constantes, qui doivent avoir lieu entre elle et des points ou des lignes fixes tracées dans son plan.*

» *Ces points et ces lignes forment, par leur ensemble, une seconde figure, qui reste fixe pendant le mouvement de la première.*

» *Que l'on considère maintenant la première figure dans une de ses positions, et qu'on la suppose fixe; puis qu'on fasse mouvoir la seconde figure, de manière qu'elle se trouve toujours dans les mêmes conditions de position par rapport à la première figure....* »

Dans cette nouvelle loi de mouvement, il y aura, sur le plan de la courbe primitivement mobile et maintenant fixe, un lieu géométrique pour tous les points qui resteront successivement immobiles pendant les déplacements infiniment petits du nouveau système mobile. Ce lieu sera la seconde courbe cherchée.

Mais le plus souvent on pourra éviter la considération de ces deux courbes, parce qu'il suffit, comme je l'ai dit, de connaître pour chaque situation du point décrivant, la situation du point de contact, avec la normale commune et les deux rayons de courbure.

Et cela même apportera beaucoup de facilité dans l'application de la méthode, en considération de ce que, dans les formules ci-dessus données pour le rayon de courbure des roulettes, on voit que les rayons de courbure des deux courbes dirigeantes n'y entrent que par la fonction

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'}$$

c'est-à-dire qu'on peut se donner toujours l'une des deux quantités r et r'; supposer, par exemple, que l'arc de roulette actuel est décrit par le roulement d'un cercle sur une ligne droite, ou de deux cercles dont les rayons ont tel rapport de grandeur et de situation qu'on voudra...

V.

Je laisse au lecteur que ces problemes intéresseront le plaisir de

trouver les rayons de courbure des diverses conchoïdes et cissoïdes, considérées dans leur génération par mouvement continu.

Je vais de suite indiquer la construction du rayon de courbure pour la courbe décrite par le point M situé sur le plan d'une figure dont le mouvement est défini par celui de deux de ses points, A et B, assujettis à demeurer sur deux courbes fixes.

Je profite de la latitude que j'ai signalée dans les formules pour les roulettes, et j'y fais

$$\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'} = \frac{1}{k};$$

en d'autres termes, je nomme k le rayon du cercle qui, en roulant sur la tangente commune aux deux courbes de roulement (l'une fixe et l'autre mobile), ferait parcourir au point M l'arc (circulaire) qu'il parcourt effectivement; c'est ce que j'appellerai le *cercle de roulement*.

Si, en même temps, j'appelle N la portion de normale entre le point décrivant et le point O actuellement fixe, ce qu'on a appelé ρ' dans les formules générales, il viendra l'expression

$$R = N^2 \frac{1}{N - k \cos i},$$

qui est la formule pour les rayons de courbure de toutes les CYCLOIDES (*allongées, accourcies* ou *ordinaires*).

Or les points A et B appartiennent au système mobile; ainsi cette formule leur est applicable.

Représentons par R_1 le rayon de courbure de la courbe sur laquelle A est assujetti à rester. Soit N_1 la distance AO entre A et le point fixe, rencontre des normales AO et BO. Enfin, soit i_1 l'angle (inconnu) que fait la ligne AO avec la normale commune des deux courbes de roulement; on aura

$$(\delta) \qquad k \cos i_1 = N_1 - \frac{N_1^2}{R_1},$$

c'est-à-dire qu'on pourra, à l'aide des lignes connues N_1 et R_1, construire la projection, sur OA, du rayon de roulement k. Seulement il faut faire attention que, pour l'exactitude de la formule (δ), la courbe

décrite par le point A doit tourner sa *concavité* vers O. Si elle y tournait sa *convexité*, on aurait

$$k \cos i_1 = N_1 + \frac{N^2}{R}.$$

Mais, d'une manière générale, « à partir de A sur la normale AO, » et *dans la concavité* de la courbe que décrit le point A, portez une » longueur égale à $\frac{N_1^2}{R_1}$; son extrémité marquera la projection sur AO » du centre du cercle de roulement.

» On construira la projection de ce même centre sur la normale OB » avec les valeurs correspondantes N_2 et R_2, et alors il sera bien facile » de construire le centre de roulement lui-même.

» Ce centre construit, projetez-le en T sur la normale passant par » le point M, c'est-à-dire sur la ligne MO; *le rayon de courbure de » la courbe décrite par* M *sera une troisième proportionnelle aux » lignes* MO *et* MT; c'est-à-dire qu'on aura pour sa valeur

$$R = \frac{\overline{MO}^2}{MT};$$

» et le centre de courbure sera placé, par rapport au point M, du » même côté que le point T. »

VI.

Lorsque le mouvement sera défini autrement que par celui de deux points assujettis à rester sur deux courbes fixes, il y aura une autre détermination pour ce que j'ai appelé le centre du cercle de roulement; mais toujours il suffira de construire ce centre et le projeter sur la normale MO en T; le rayon de courbure en M sera encore donné par cette même formule

$$R = \frac{\overline{MO}^2}{MT}.$$

Si l'on considère le mouvement simultané de tous les points M, M′, M″,... de la figure plane, leurs vitesses sont proportionnelles à MO, M′O, M″O,...; de sorte qu'il suffit d'avoir déterminé le point O et l'une

des vitesses pour connaître toutes les autres, circonstance qui peut être d'une grande utilité dans le calcul des machines, comme l'a fait remarquer M. Chasles, en exposant la propriété du point O par rapport à la détermination des tangentes.

Le calcul des machines pourra, ce me semble, tirer aussi quelque utilité de la présente méthode pour les rayons de courbure; car une fois déterminé ce que j'ai appelé le centre de roulement, si on le projette en T, T′, T″,... sur les diverses normales MO, M′O, M″O,..., la force centrifuge pour l'unité de masse en chacun des points M, M′, M″,.... étant proportionnelle respectivement à

$$\frac{\overline{MO}^2}{R},\quad \frac{\overline{M'O}^2}{R'},\quad \frac{\overline{M''O}^2}{R''},\ldots.$$

se trouvera, à cause de la valeur des rayons R, R′, R″,..., représentée graphiquement par les lignes MT, M′T′, M″T″,..., solution bien simple, puisque tous ces points T, T′, T″ sont sur le cercle passant en O et décrit sur le rayon du cercle de roulement comme diamètre.

Note de M. Chasles.

M. Liouville m'ayant parlé du Mémoire précédent de M. Transon, comme étant une extension, en quelque sorte, d'un Mémoire que j'avais communiqué anciennement à la Société Philomatique, sur les *centres instantanés de rotation* et leur usage pour la construction des normales aux courbes décrites dans le mouvement d'une figure, je lui ai répondu que je construisais aussi les rayons de courbure, non-seulement des courbes décrites par des points de la figure, mais encore des courbes enveloppes de l'espace parcouru par des courbes mobiles avec la figure; ce qui est plus général et comprend le cas des courbes décrites par des points. La Note que j'ai remise à ce sujet ne pourra paraître que dans le prochain numéro.

Je profiterai de cette occasion pour dire qu'aussitôt que j'ai eu connaissance des recherches de M. A. Cayley sur les courbes du troisième

degré, j'ai communiqué à M. Liouville des cahiers déjà anciens, où se trouvent, parmi un très-grand nombre de théorèmes sur les courbes du troisième degré, ceux qu'a publiés le savant géomètre de Cambridge, notamment dans les derniers numéros de ce Journal. J'ai perdu, sans doute, la priorité sur ces théorèmes que je possédais depuis longtemps; mais il m'importait de constater que mes recherches ne m'ont pas été inspirées par le travail de M. Cayley. Du reste, la marche toute géométrique que j'ai suivie est fort différente de ses procédés de calcul; et l'on pourra reconnaître, tant par un passage de mon *Aperçu historique*, où j'annonce une *Théorie géométrique des courbes du troisième degré*, que par différents résultats énoncés çà et là dans mes Mémoires, que je possédais, en effet, dès lors, des théorèmes assez nombreux et divers sur ces courbes.

SUR QUELQUES INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR M. A. CAYLEY.

J'ai donné, il y a trois ans, dans le *Cambridge Mathematical Journal*, une formule assez singulière pour l'intégrale multiple

$$\int \ldots dx_1\, dx_2 \ldots \varphi\, a_1 - x_1,\ a_2 - x_2 \ldots,$$

prise entre les limites données par l'équation

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \frac{x_2^2}{h_2^2} + \ldots = 1,$$

la fonction φ étant seulement assujettie à la condition de ne pas devenir infinie entre les limites de l'intégration. L'expression que j'obtiens est une suite infinie, dont le terme général est de cette forme

$$A_p \left(h_1^2 \frac{d}{da^2} + h_2^2 \frac{d}{da^2} + \ldots\right)^p \varphi\, a_1,\ a_2 \ldots.$$

En appliquant ce résultat à un cas particulier, j'ai obtenu l'intégrale à n variables analogue à celle qui exprime le *potentiel* d'un ellipsoïde homogène, pour un point extérieur. J'ai depuis cherché à étendre ces résultats au cas d'une densité variable et égale à une fonction rationnelle et entière des coordonnées, et d'une loi d'attraction selon une puissance quelconque de la distance (toujours à n variables); mais quoique j'aie réussi à effectuer cette généralisation, mes formules étaient si confuses et si inférieures à celles que donne la belle analyse de M. Lejeune-Dirichlet, que je ne les ai jamais publiées. Cependant, en revenant il y a quelques jours sur ce sujet, en me fondant sur une intégrale plus générale, j'ai trouvé que la question était à peine plus difficile que dans le cas d'une densité constante, et se laissait traiter exactement de la même manière. J'ai réussi de cette façon à exprimer

l'intégrale cherchée au moyen d'une seule intégrale définie *abélienne*, et de ses coefficients différentiels relatifs aux constantes qui y entrent: et il m'a paru que les formules que j'ai ainsi obtenues pourraient n'être pas tout à fait indignes de l'attention des géomètres.

Considérons l'intégrale multiple à n variables V, donnée par l'équation

$$V = \int dx_1 \ldots x_1^{2r_1+1} \ldots (f \text{ termes}) x_{f+1}^{2r_{f+1}} \ldots (n-f \text{ termes}) \varphi(a_1 + x_1 t, \ldots),$$

où les variables $x_1, \ldots$ doivent recevoir des valeurs réelles quelconques, positives ou négatives, qui satisfassent à la condition

$$x_1^2 + \ldots \leqq 1;$$

et l'on suppose de plus qu'il est permis de développer (sous le signe intégral) la fonction φ, suivant les puissances ascendantes des variables $x_1, \ldots$.

En faisant ce développement, il est clair que les termes qui contiennent des puissances impaires d'une ou de plusieurs des variables se détruisent par l'intégration; donc, en ne faisant attention qu'aux termes qui contiennent seulement des puissances paires, on a ce terme général

$$\frac{(-1)^{f(p+1)}}{[2r_1+1]^{2r_1+1} \ldots [2r_{f+1}]^{2r_{f+1}} \ldots} \left(\frac{d}{da}\right)^{2r_1+1} \ldots \left(\frac{d}{da_{\ldots}}\right)^{2r_{f+1}} \ldots \varphi(a_1, \ldots)$$

$$\times \int dx_1 \ldots x_1^{2r_1+p-2} \ldots x_{f+1}^{2r_{f+1}+2r_{f+1}} \ldots$$

où

$$p = r_1 + \ldots;$$

il est à peine nécessaire de remarquer que, dans l'expression

$$[2r_1+1]^{2r_1+1} \ldots [2r_{f+1}]^{2r_{f+1}} \ldots,$$

il faut prendre (f) termes tels que $[2r_1+1]^{2r_1+1}$, et $n-f$ termes de l'autre forme $[2r_{f+1}]^{2r_{f+1}}$, et ainsi dans tous les cas semblables.

L'intégrale qui entre dans cette formule a été trouvée, comme on

sait, par M. Dirichlet. Sa valeur est

$$\frac{\Gamma\left(\alpha_1+r+\frac{3}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\alpha_{f+1}+r_{f+1}-\frac{1}{2}\right)\cdots}{\Gamma\left(p+k+f+\frac{n}{2}+1\right)}\,h_1^{2\alpha_1+2r_1-3}\cdots h_{f+1}^{2\alpha_{f+1}+2r_{f+1}-1}.$$

ou

$$k=\alpha_1+\ldots.$$

Le terme entier devient, après quelques réductions très-simples,

$$\frac{(-1)^f\pi^{\frac{1}{2}n}t^{2p-f}}{2^{2p-k-f}\,\Gamma\left(p+k+f+\frac{1}{2}n+1\right)}$$

$$\times\frac{L_1\ldots M_{f+1}\ldots}{r_1!\ldots}\,h_1^{2\alpha_1+2r_1+3}\cdots h_{f+1}^{2\alpha_{f+1}+2r_{f+1}-1}\left(\frac{d}{da}\right)^{2r_1-1}\cdots\left(\frac{d}{da_{f+1}}\right)^{2r_{f+1}-1}\cdots\varphi(a_1,\ldots),$$

où l'on écrit, pour un moment,

$$L_1=\overline{2r_1+3}\;\overline{2r_1+5}\cdots\overline{2r_1+2\alpha_1+1},$$

$$\vdots$$

$$M_{f+1}=\overline{2r_{f+1}+1}\;\overline{2r_{f+1}+3}\cdots\overline{2r_{f+1}+2\alpha_{f+1}+1};$$

$$\vdots$$

puis on le transforme en

$$\frac{(-1)^f\pi^{\frac{1}{2}n}t^{2p-f}}{2^{2p-k-f}\,\Gamma\left(p+k+f+\frac{1}{2}n+1\right)}$$

$$\cdot\left(\frac{d}{da}\cdot\frac{d}{da_1}\right)\cdot\left(h_1^3\frac{d}{dh}\right)^{\alpha_1}\cdots h_1^3\cdots h_{f+1}\cdots\frac{1}{(r_1)!}\left(h_1^2\frac{d^2}{da^2}\right)^{r_1}\cdots\varphi(a_1,\ldots).$$

En effet, les symboles $\frac{d}{da}$ et $h_1^3\frac{d}{dh}$ étant conversibles, on a

$$\frac{d}{da}\cdot\left(h_1^3\frac{d}{dh}\right)^{\alpha_1}\cdot h_1^{2r_1+3}\left(\frac{d}{da}\right)^{2r_1-1}=L_1h_1^{2r_1+2\alpha_1+3}\left(\frac{d}{da}\right)^{2r_1+1}.$$

et ainsi de suite.

En prenant la somme de tous les termes qui correspondent à une

même valeur de p, on a

$$\mathrm{S}\frac{1}{[r_1]^{r_1}}\left(h_1^2\frac{d^2}{da_1^2}\right)^{2r_1}\cdots=\frac{1}{[p]^p}\nabla^p.$$

En posant

$$\nabla=\left(h_1^2\frac{d^2}{da_1^2}+\ldots\right);$$

puis, en observant que p doit s'étendre depuis 0 jusqu'à ∞, on a, pour l'intégrale cherchée,

$$\mathrm{V}=\frac{(-)^f.\pi^{\frac{1}{2}n}}{2^{k+f}}\left(\frac{d}{da}\cdots\frac{d}{da_f}\right)\cdot\left(h_1^3\frac{d}{dh}\right)^{\alpha_1}\cdots$$

$$\times\left[h_1^3\ldots h_{f+1}\ldots t^f.\,\mathrm{S}_{p=0}^{p=\infty}\left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}[p]^p\,\Gamma\left(p+k+f+\frac{1}{2}n+1\right)}\nabla^p.\varphi(a_1,\ldots)\right)\right]\cdot$$

ce qui fait voir que l'intégrale V dépend de cette seule expression

$$\mathrm{U}=\mathrm{S}_0^{\infty}\left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}[p]^p\,\Gamma\left(p+k+f+\frac{1}{2}n+1\right)}\nabla^p.\varphi(a_1,\ldots)\right)\cdot$$

On peut remarquer, en passant, que cette quantité satisfait à cette équation différentielle

$$\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\cdot\left(t^{-2k-2f-n+1}\frac{d}{dt}(t^{2k+2f+n}\mathrm{U})\right)-\nabla\mathrm{U}=0.$$

ou

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{dt^2}+(2k+2f+n+1)\frac{1}{t}\frac{d\mathrm{U}}{dt}-\nabla\mathrm{U}=0.$$

M. G. Boole, de Lincoln, a déduit une équation semblable de mes formules dans le *Mathematical Journal*. C'est à lui qu'on doit l'introduction dans l'intégrale proposée de cette quantité t, ce qui, au reste, n'est pas d'une grande importance ici; mais j'ai cru devoir la conserver, à cause de cette équation même, qui pourrait conduire à des résultats intéressants.

A présent, soit

$$\varphi(a_1-x_1t,\ldots)=\frac{1}{(a-x_1t+\ldots)^{n-1}}.$$

où s est un nombre entier; je pose, pour abréger,

$$\frac{1}{2}n - s = i, \quad k + f + s = \sigma,$$

ce qui donne

$$\Gamma\left(p + k + f + \frac{1}{2}n + 1\right) = \Gamma(p + i + \sigma + 1) = [p + i + \sigma]^{p+1}.\Gamma(i + \sigma);$$

et ainsi

$$U = \frac{1}{\Gamma(i+\sigma)} S_0^{\infty}\left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}.[p]^p[p+i+\sigma]^{p+1}}\Gamma^p.\left(a_1^2 + \ldots\right)^{\sigma}\right).$$

Le cas de $\sigma = 0$, qui est le plus simple, est, en effet, celui du Mémoire cité, et à ce cas on peut réduire celui de σ entier négatif; il y a même deux manières d'effectuer cette réduction. Représentons, en effet, la valeur de U par cette notation plus complète U_i; on obtient tout de suite

$$U_i^{-\sigma} = 2^{-2\sigma} t^{2\sigma - 2i}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\sigma}(t^{2i} U_i),$$

et

$$U_i^{-\sigma} = \frac{1}{2^{2\sigma}[1-i]^{\sigma}\left[i - \frac{1}{2}n\right]^{\sigma}}\left(\frac{d^2}{da_1^2} + \ldots\right)^{\sigma} U_{i-\sigma},$$

la seconde desquelles équations se déduit de cette formule facile à démontrer,

$$\left(\frac{d^2}{da_1^2} + \ldots\right)^{\sigma}\cdot\frac{1}{a_1^2 + \ldots} = 2^{2\sigma}.[i-1]^{\sigma}\left[i - \frac{1}{2}n\right]^{\sigma}\cdot\frac{1}{(a_1^2 + \ldots)^{\sigma}}.$$

Nous pouvons donc, dans la suite, ne considérer que le cas de σ entier positif.

Commençons par opérer la transformation que voici; en déterminant ζ par l'équation

$$\frac{a_1^2}{\zeta - h^2} + \ldots = t^2,$$

je pose

$$l_1 = \frac{h_1^2}{\zeta}\ldots\ldots \quad a_1^2 = (1 - l_1)t^2 \alpha_1^2\ldots\ldots$$

ce qui donne

$$\zeta = \alpha_1^2 + \ldots,$$
$$\alpha_1^2 + \ldots = t^2 . [1 + l_1 . \alpha_1^2 + \ldots].$$
$$\nabla = \frac{\zeta}{t^2} . \left(\frac{l_1}{1 + l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots \right),$$

où il faut remarquer que ce ζ, contenu en ∇, ne doit pas être affecté des symboles $\frac{d}{d\alpha_1}, \ldots$ de ∇, de manière qu'il faut écrire

$$\nabla^p = t^{-2p} . \zeta^p \left(\frac{l}{1 + l} \frac{d^2}{d\alpha^2} + \ldots \right)^p = t^{-2p} . \alpha_1^2 + \ldots)^p . \left(\frac{l}{1 + l} \frac{d}{d\alpha^2} + \ldots \right)^p,$$

$$U = \frac{1}{\Gamma_1 . t^{2i} . \alpha_1^2 + \ldots}$$
$$\times S_{\ldots}^{\infty} \left(\frac{1}{\ldots p + i + \sigma \ldots} \frac{1}{[p]^2} (\alpha_1^2 + \ldots)^{p+i} \left(\frac{l}{1 + l} \frac{d}{d\alpha_1} + \ldots \right)^p \frac{1}{\alpha_1^2 + \ldots} \right).$$

formules qui se prêtent mieux aux réductions, quoique plus compliquées en apparence.

Écrivons d'abord

$$\frac{l}{1 + l} \frac{d^2}{d\alpha^2} + \ldots = \left(\frac{d}{d\alpha_1^2} + \ldots \right) - \left(\frac{1}{1 + l} \frac{d^2}{d\alpha^2} + \ldots \right)$$
$$= \Delta - \left(\frac{1}{1 + l} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots \right).$$

En développant la $p^{\text{ième}}$ puissance de ce symbole selon les puissances de Δ, on a

$$(-1)^{p-q} \frac{|p|}{|p-q|^2 |q|} . \Delta^q \left(\frac{1}{1 + l} \frac{d}{d\alpha} + \ldots \right)^{p-q}$$

qui doit s'appliquer à $\frac{1}{(1 + l\alpha^2 + \ldots)^q}$.

Considérons l'expression

$$\left(\frac{l}{1 + l} \frac{d}{d\alpha_1^2} + \ldots \right)^{p-q} \frac{1}{(1 + l\alpha^2 + \ldots)^q},$$

et mettons, pour un moment,

$$(1 + l_1)\alpha_1^2 = \alpha'^2_1 \ldots,$$

cette expression se trouve réduite à

$$\left(\frac{d^2}{d\alpha'^2_1}+\ldots\right)^{p-q}\frac{1}{(\alpha'^2_1+\ldots)^i},$$

laquelle, par une formule déjà citée, devient

$$2^{2p-2q}.[i+p-q-1]^{p-q}.\left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q}.\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+p-q}}.$$

c'est-à-dire

$$2^{2p-2q}.[i+p-q-1]^{p-q}.\left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q}.\frac{1}{(\alpha_1^2(1+l_1)+\ldots)^{i+p-q}}.$$

Le terme général de U, en faisant abstraction du facteur $\frac{1}{\Gamma(i).t^{2i}(\alpha_1^2+\ldots)^i}$, se réduit à

$$\frac{(-)^{p-q}.(\alpha_1^2+\ldots)^{p+i}}{2^{2q}[p+i+\sigma]^{\sigma+q+1}[p-q]^{p-q}.[q]^q}\left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q}.\Delta^q.\frac{1}{(\alpha_1^2(1+l_1)+\ldots)^{i+p-q}};$$

considérons la partie de ce terme qui est de l'ordre θ en $l_1,\ldots$, elle devient

$$\frac{(-)^{p-q+\theta}(\alpha_1^2+\ldots)^{p+i}}{2^{2q}.[p-q]^{p-q}[q]^q[s]^s}[i+p-q+\theta-1]^{\theta-s-q-1}$$
$$\times\left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q}\Delta^q.\frac{(l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+p-q+\theta}}.$$

Soit, en général, Θ une fonction homogène de l'ordre 2θ des lettres $\alpha_1,\ldots$; on a

$$\Delta\frac{\Theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^i}=\frac{\Delta\Theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^i}+2^2.i\left(i+1-2\theta-\frac{1}{2}n\right)\frac{\Theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+1}};$$

et de là, en répétant toujours l'opération Δ, et faisant attention à ce que $\Delta\Theta$, $\Delta^2\Theta,\ldots$ sont des fonctions homogènes des ordres $2\overline{\theta-1}$, $2\overline{\theta-2}$, etc., on obtient

$$\Delta^q.\frac{\Theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^i}=\frac{[q]^q}{[\lambda]^\lambda.[q-\lambda]^{q-\lambda}}2^{2q-2\lambda}[i+q-\lambda-1]^{q-\lambda}$$
$$\times\left[i+q-2\theta-\frac{1}{2}n\right]^{q-\lambda}\Delta^\lambda\Theta.\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+q-\lambda}},$$

ou

$$\Delta^q \cdot \frac{(l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+p-q+\theta}} = \frac{[q]^q}{[\lambda]^\lambda \cdot [q-\lambda]^{q-\lambda}} 2^{2q-2\lambda} [i+p+\theta-\lambda-1]$$

$$\times \left[i+p-\theta-\frac{1}{2}n\right]^{q-\lambda} \Delta^\lambda (l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+p-\theta-\lambda}}.$$

depuis $\lambda = 0$, jusqu'à $\lambda = q$.

Puis, pour le terme général de U,

$$\frac{(-)^{p-q+\theta}}{2^{2\lambda} \cdot [p-q]^{p-q} \cdot [\theta]^\theta [\lambda]^\lambda [q-\lambda]^{q-\lambda}} [i+p+\theta-\lambda-1]^{\theta-\lambda-1}$$

$$\times \left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q} \left[i+p-\theta-\frac{1}{2}n\right]^{q-\lambda} \Delta^\lambda (l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+p-\theta-\lambda}}$$

ou

$$\frac{(-)^{-q}}{[p-q]^{p-q} \cdot [q-\lambda]^{q-\lambda}} \left[i+p-\frac{1}{2}n-q\right]^{p-q} \left[i+p-\theta-\frac{1}{2}n\right]^{q-\lambda}$$

$$\times \frac{(-)^{p+\theta}}{2^{2\lambda}[\theta]^\theta \cdot [\lambda]^\lambda} [i+p+\theta-\lambda-1]^{\theta-\lambda-1} \Delta^\lambda (l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+p-\theta-\lambda}}$$

le dernier facteur étant indépendant de q, q doit s'étendre depuis 0 jusqu'à p. Mais à cause de $[q-\lambda]^{q-\lambda}$ qui devient infini pour $q < \lambda$, on peut faire étendre q depuis $q = \lambda$ jusqu'à $q = p$; ou, en écrivant

$$q-\lambda = q', \quad p-\lambda = p',$$

q' s'étend depuis 0 jusqu'à p'. Le facteur à sommer est donc

$$(-)^\lambda \cdot \left\{\frac{(-)^{q'}}{[p'-q']^{p'-q'}[q']^{q'}} [C-q']^{p'-q'} [M]^{q'}\right\}.$$

Si, pour un moment, l'on pose

$$C = i+p'-\frac{1}{2}n, \quad M = i+p-\theta-\frac{1}{2}n,$$

somme qui se réduit à

$$(-)^\lambda \cdot \frac{[C-M]^{C-M-p'}}{[C-M-p']^{C-M-p'}},$$

c'est-à-dire à

$$(-)^\lambda \cdot \frac{[\theta-\lambda]^{\theta-p}}{[\theta-p]^{\theta-p}}.$$

nous avons le terme général

$$\frac{(-1)^{\lambda-p-\theta}[\theta-\lambda]^{\theta-p}.[i+\theta-\lambda-1+p]^{\theta-\sigma-\lambda-1}}{2^{2\lambda}.[\theta]^{\theta}[\lambda]^{\lambda}.[\theta-p]^{\theta-p}}\Delta^{\lambda}.\,l_1\alpha_1^2+\ldots)^{\theta}.\frac{1}{(x^2+\ldots)^{\theta-\lambda}}.$$

Écrivons

$$p=\theta-p':$$

cela devient

$$\frac{(-1)^{p'}[\mathrm{M}]^{p'}[\mathrm{C}-p']^{\mathrm{C}-\mathrm{A}}}{[p']^{p'}}\frac{(-1)^{\lambda}}{2^{2\lambda}.[\theta]^{\theta}[\lambda]^{\lambda}}.\Delta^{\lambda}\,l_1\alpha_1^2+\ldots)^{\theta}.\frac{1}{(x_1^2+\ldots)^{\theta-\lambda}}.$$

$$\mathrm{M}=\theta-\lambda,\quad \mathrm{C}=i+2\theta-\lambda-1,\quad \mathrm{C}-\mathrm{A}=\theta-\sigma-\lambda-1:$$

p' doit s'étendre depuis $-\infty$ jusqu'à θ. Mais à cause de $[p']^{p'}$, qui devient infini, pour p' négatif, on peut l'étendre seulement depuis o jusqu'à θ, ou même seulement depuis o jusqu'à M, à cause du facteur $\mathrm{M}^{p'}$. La somme se réduit à

$$[\mathrm{C}-\mathrm{M}]^{\mathrm{C}-\mathrm{M}-\mathrm{A}}.[\mathrm{C}-\mathrm{A}]^{\mathrm{M}}=[i+\theta-1]^{\theta-\sigma-1}[\theta-\sigma-\lambda-1]^{\theta-\lambda}.$$

et le terme général devient

$$\frac{(-1)^{\lambda}}{2^{2\lambda}.[\theta]^{\theta}[\lambda]^{\lambda}}.[i+\theta-1]^{\theta-\sigma-1}.[\theta-\sigma-\lambda-1]^{\theta-\lambda}\Delta^{\lambda}\,l_1\alpha_1^2+\ldots)^{\theta}.\frac{1}{(x_1^2+\ldots)^{\theta-\lambda}}.$$

Écrivons enfin

$$\theta=\lambda+\varkappa,$$

le terme devient

$$\frac{(-1)^{\lambda}}{2^{2\lambda}[\lambda]^{\lambda}.[\lambda+\varkappa]^{\lambda+\varkappa}[i+\lambda+\varkappa+\sigma]^{\sigma+1}}.[\varkappa-\sigma-1]^{\lambda}.\Delta^{\lambda}.\,l_1\alpha_1^2+\ldots)^{\lambda+\varkappa}.\frac{1}{(x^2+\ldots)^{\varkappa}}.$$

Il faut que $\varkappa$ soit toujours positif, car autrement le terme s'évanouit à cause de $\Delta^{\lambda}.\,l_1\alpha_1^2+\ldots)^{\lambda+\varkappa}$; mais pour k plus grand que σ, le facteur $[\varkappa-\sigma-1]^{\varkappa}$ s'évanouit ; donc $\varkappa$ s'étend seulement depuis o jusqu'à σ.

Soit $k_1+\ldots=\varkappa$, et considérons les termes de $\Delta^{\lambda}(l_1\alpha_1^2+\ldots)$ qui contiennent $\alpha_1^{2k_1}$,.... Ces termes seront de la forme

$$\frac{[\lambda]^{\lambda}}{[q_1]^{q_1}\ldots[q_1+k_1]^{q_1+k_1}\ldots}\frac{[\lambda+\varkappa]^{\lambda+\varkappa}}{}\left(\frac{d}{dx^2}\right)^{2q_1}\ldots l_1^{q_1+k_1}\alpha_1^{2q_1+2k_1}\ldots,$$

ou

$$q_1+\ldots=\lambda.$$

c'est-à-dire

$$\frac{[\lambda]^{\nu}.[\lambda+\nu]^{\nu+\nu}.[2q_1+2k_1]^{2q_1}\ldots}{[q_1]^{q_1}\ldots[q_1+k_1]^{q_1+k_1}\ldots}\, l_1^{q_1+k_1}\ldots \alpha_1^{2k_1}\ldots$$

ou, en réduisant à

$$2^{2\nu}[\lambda]^{\nu}[\lambda+\alpha]^{\nu+\nu}\cdot\frac{\alpha_1^{2k_1}\ldots}{[k_1]^{k_1}\ldots}\,\frac{\left[q_1+k_1-\frac{1}{2}\right]^{q_1}\ldots}{[q_1]^{q_1}\ldots}\, l_1^{q_1+k_1}\ldots;$$

ce qui donne pour U,

$$\frac{1}{[\alpha+\nu+\lambda+\sigma]^{\nu+1}}\,\frac{\left[q_1+k_1-\frac{1}{2}\right]^{q_1}\ldots}{[q_1]^{q_1}\ldots}\, l_1^{q_1+k_1}\ldots\,\frac{[\alpha-\sigma-1]^{\nu}.\alpha^{2k_1}\ldots}{[k_1]^{k_1}\ldots}\,\frac{1}{\alpha^{2k_1}+\ldots}.$$

Soit

$$\frac{1}{(1+l_1u^2\ldots)^{\frac{1}{2}}} = (0)+(1).u\ldots+(\lambda).u^{\lambda}+\ldots;$$

on a

$$(\lambda) = -\nu\,\frac{\left[q_1-\frac{1}{2}\right]^{q_1}\ldots}{[q_1]^{q_1}\ldots}\, l_1^{q_1}\ldots+\text{etc.}\quad q_1+\ldots=\lambda;$$

et de là,

$$\left[k_1-\frac{1}{2}\right]^{k_1}\ldots l_1^{k_1}\ldots\left(l_1^2\frac{d}{dl_1}\right)^{k_1}\ldots l_1^{\frac{1}{2}}(\lambda) = \left(-\nu\,\frac{\left[q_1+k_1-\frac{1}{2}\right]^{q_1}\ldots}{[q_1]^{q_1}\ldots}\, l_1^{q_1+k_1}\ldots\right).$$

de manière que le terme de U devient

$$\frac{1}{l_1\ldots}\left(l_1^2\frac{d}{dl_1}\right)^{k_1}\ldots l_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{[\lambda+\nu+\lambda+\sigma]^{\nu+1}}(\lambda)\right)\cdot\frac{[\alpha-\sigma-1]^{\nu}.\alpha^{2k_1}}{[2k_1]^{2k_1}\ldots}\,\frac{1}{\alpha^{2k_1}+\ldots}.$$

Prenant la somme pour λ, à l'aide de

$$[\sigma]^{\nu}\int_0^1(1-u^2)^{\sigma-\nu+\nu-1}.du = \frac{1}{[\lambda+\nu+\sigma+\nu]^{\nu+1}}$$

(ce qui suppose $l+u>0$), on obtient

$$\frac{2^{2\nu}.[\sigma]^{\nu}.[\alpha-\sigma-1]^{\nu}\alpha_1^{2k_1}\ldots}{[2k_1]^{2k_1}\ldots\alpha_1^2+\ldots}\,\frac{1}{\sqrt{l_1\ldots}}\left(l_1^2\frac{d}{dl_1}\right)^{k_1}\ldots\sqrt{l_1\ldots}\int_0^1\frac{(1-u^2)^{\nu}.u^{\alpha-\sigma-1}.du}{(1+l_1u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

ou, mettant $l_1 = \frac{h_1^2}{\zeta}, \ldots$

$$2^{\varkappa}.[\sigma]^{\sigma}[\varkappa - \sigma - 1]^{\varkappa} \cdot \frac{\alpha_1^{2k_1} \ldots}{[2k_1]^{2k_1} \ldots} \zeta^{\frac{n}{2} - 2\varkappa}$$

$$\times \frac{1}{h_1 \ldots} \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{k_1} \ldots h_1 \ldots \int_0^1 \frac{(1-u)^{\sigma} u^{i+\varkappa-1}.du}{\{(\zeta + h_1^2 u) \ldots\}^{\frac{i}{2}}};$$

en rétablissant le facteur constant $\frac{1}{\Gamma(i).t^{2i}.\zeta^{i}}$ de U, le terme général de cette quantité est

$$\frac{2^{\varkappa}.[\sigma]^{\sigma}[\varkappa - \sigma - 1]^{\varkappa}}{t^{2i}\,\Gamma(i)} \cdot \frac{\alpha_1^{2k_1} \ldots}{[2k_1]^{2k_1} \ldots} \zeta^{\frac{n}{2} - 2\varkappa + i}$$

$$\times \frac{1}{h_1 \ldots} \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{k_1} \ldots h_1 \ldots \int_0^1 \frac{(1-u)^{\sigma} u^{i+\varkappa-1}.du}{\{(\zeta + h_1^2 u) \ldots\}^{\frac{i}{2}}}.$$

où k_1, etc., sont des entiers positifs quelconques qui satisfont à

$$k_1 + \ldots = \varkappa,$$

et $\varkappa$ peut s'étendre depuis o jusqu'à σ. Il faut observer qu'en différentiant par $\frac{d}{dh_1}$, etc., on ne doit pas considérer ζ comme fonction de $h_1, \ldots$, ce qui est cependant nécessaire dans l'équation entre V et U.

SUR LES DEUX FORMES

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2;$$

PAR J. LIOUVILLE.

M. Jacobi a fait voir [*] que tout nombre entier N peut s'exprimer sous la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2.$$

D'un autre côté, en vertu d'un théorème de Fermat aujourd'hui bien démontré, N est la somme de quatre carrés au plus. J'ai trouvé qu'on peut passer facilement de l'un quelconque de ces théorèmes à l'autre.

1°. Admettons comme démontré le théorème de M. Jacobi, c'est-à-dire admettons qu'on ait

$$N = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2.$$

Il en résultera identiquement

$$N = x^2 + (y + z + t)^2 + (y - z - t)^2 + (2t - z)^2.$$

Ainsi N est la somme de quatre carrés; c'est le théorème de Fermat.

2°. Réciproquement, si N est la somme de quatre carrés, en sorte que

$$N = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

le théorème de M. Jacobi s'en déduira comme il suit :

La racine de chacun des quatre carrés prise avec un signe convenable est nécessairement de l'une des deux formes $3n + 1$, $3n$; car lors même qu'elle aurait une valeur absolue de forme $3p + 2$, en la prenant négativement et posant $n = -(p + 1)$, on la ramènerait à la forme $3n + 1$. Parmi les quatre racines x, y, z, t, ainsi affectées du

[*] Tome VII de ce Journal, page 109.

signe + ou du signe —, on en trouvera donc toujours ou deux ou plus de deux ayant la même forme. Dans le dernier cas, la somme de trois racines semblables sera divisible par 3. Dans le premier, on obtiendra encore un nombre divisible par 3, si, à la différence des deux racines de forme $3n+1$, on ajoute une des deux racines restantes. Ainsi, dans tous les cas, il y a une somme $x+y+z$ de trois racines, prises positivement ou négativement, qui est divisible par 3, et dont on peut représenter le carré par $9v^2$. J'observe, de plus, que parmi les trois nombres x, y, z, deux au moins (x et y par exemple) sont à la fois pairs ou à la fois impairs.

Cela étant, je pars de l'équation identique

$$3(x^2+y^2+z^2) = (x+y+z)^2 + 2\left(\frac{x+y}{2} - z\right)^2 + 6\left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

qu'on peut écrire

$$3(x^2+y^2+z^2) = (x+y+z)^2 + 2(s-z)^2 + 6u^2,$$

où s et u sont des entiers. Le premier membre et le dernier terme du second membre sont multiples de 3; $(x+y+z)^2 = 9v^2$ l'est aussi; il faut donc que $(s-z)^2$ soit également multiple de 3 et de forme $9w^2$. Dès lors, en divisant par 3, on aura

$$x^2+y^2+z^2 = 2u^2+3v^2+6w^2,$$

puis, en ajoutant t^2 de part et d'autre,

$$N = t^2+2u^2+3v^2+6w^2,$$

ce qu'il fallait trouver.

ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

RECHERCHE

DES FACTEURS COMMENSURABLES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. FINCK.

1. Je diviserai cette question en deux parties. Dans la première, je m'occuperai des racines imaginaires à coefficients commensurables, telles que $5 + \frac{2}{3}\sqrt{-1}\ldots$, que j'appellerai, selon l'usage, *racines commensurables complexes;* dans la seconde partie, il s'agira des racines incommensurables, exprimables par des radicaux du second degré, c'est-à-dire de toutes les racines qui peuvent être fournies par des équations du second degré à coefficients réeels commensurables.

2. Dans l'une et l'autre, je m'appuierai sur ce que :

Une fonction entière absolue

$$fx = x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m,$$

dont le premier coefficient est l'unité, ne saurait admettre un diviseur

$$ax^{m-\alpha} + a_1 x^{m-\alpha-1} + \ldots,$$

entier absolu, dont le premier coefficient est différent de l'unité, a, a_1, a_2, etc., étant premiers entre eux.

Car soit $\frac{Q}{D}$ le quotient, Q étant entier absolu, et premier avec le nombre entier D; on aurait

$$fx = \frac{Q}{D}(ax^{m-\alpha} + \ldots).$$

Mais D est premier avec Q; D ne divise pas $ax^{m-\alpha} + \ldots$ dont les coefficients sont premiers entre eux; donc, etc.

Recherche des racines commensurables complexes.

3. Je suppose, dans tout ce qui suit, que les coefficients soient réels; si le contraire a lieu, c'est-à-dire s'il s'agit d'une équation telle que

$$\varphi x + \psi x . \sqrt{-1} = 0,$$

ses racines réelles satisfont à

$$\varphi x = 0, \quad \psi x = 0,$$

et seront, par suite, racines du plus grand commun diviseur de φx et ψx; ses racines imaginaires satisferont à

$$(\varphi x)^2 + (\psi x)^2 = 0,$$

et parmi les racines imaginaires de celles-ci, supposées *connues*, on distinguera facilement celles de la proposée.

4. On sait que dans toute équation, l'unité augmentée du module maximum des coefficients rapportés au premier est une limite supérieure des modules des racines de toute espèce. Soit k cette limite.

5. *Dans toute équation à coefficients réels entiers $fx = 0$, le dernier terme est divisible par le carré du module de chaque racine complexe entière.*

Car si $a + b\sqrt{-1}$ est une pareille racine, fx est divisible par $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$; et comme le premier terme du diviseur a pour coefficient l'unité, le quotient sera entier absolu; d'ailleurs son dernier terme, multiplié par $a^2 + b^2$, reproduira le dernier terme de fx. Donc, etc.

6. D'après cela, pour trouver les racines complexes entieres de fx, on cherche les facteurs du dernier terme, en se bornant à ceux qui sont moindres que k^2 : on décomposera chacun de ces diviseurs en deux carrés additifs, comme $a^2 + b^2$, et l'on aura à essayer les quatre couples de racines $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, $\pm b \pm c\sqrt{-1}$, ce qui peut donner lieu à quatre essais.

7. *Règle d'exclusion.* Si $a + b\sqrt{-1}$ satisfait à $fx = 0$, on a

$$fx = (x - a - b\sqrt{-1})\,\varphi x,$$

φx étant complexe entier; de là

$$(1)\qquad fa = -b\sqrt{-1}\,\varphi a,$$

$$(2)\qquad f(b\sqrt{-1}) = -a\varphi(b\sqrt{-1}),$$

$$(3)\qquad f(1) = (1 - a - b\sqrt{-1})\,\varphi 1,$$

$$(4)\qquad f(-1) = -(1 + a + b\sqrt{-1})\,\varphi(-1).$$

On a encore

$$fx = [(x - a)^2 + b^2]\,\psi x.$$

ψx est entier et réel.

De là

$$(5)\qquad f1 = [(1 - a)^2 + b^2]\,\psi 1,$$

$$(6)\qquad f(-1) = [(1 + a)^2 + b^2]\,\psi(-1),$$

$$(7)\qquad fa = b^2\,\psi a.$$

8. Ayant ainsi limité les nombres à essayer, on peut procéder comme pour les racines commensurables; mais si l'on observe que, dans ce dernier cas, et par rapport à un diviseur c, la méthode des racines commensurables revient à diviser par $c - x$ le premier membre de l'équation, ordonné d'une manière ascendante, on sera conduit à diviser de même fx par $a^2 + b^2 - 2ax + x^2$. On aura ainsi plus de chances pour se débarrasser, le plus simplement, des nombres qui ne sont pas racines

9. Voici un exemple :

$$x^7 - x^6 + 6x^5 - 26x^4 + 17x^3 - 7x^2 - 52x - 10 = 0.$$

Dans le cas actuel on aurait

$$k = 33;$$

mais le carré d'aucun module ne peut surpasser 10; donc les diviseurs sont 1, 2, 5, 10, qui se décomposent, sous la forme $a^2 + b^2$, ainsi

qu'il suit :

$$1 = 0^2 + 1^2, \quad 2 = 1^2 - 1^2, \quad 5 = 1^2 - 2^2, \quad 10 = 1^2 - 3^2.$$

De là, à essayer,

$$\pm\sqrt{-1}, \quad \pm 1 \pm \sqrt{-1}, \quad \pm 1 \pm 2\sqrt{-1},$$
$$\pm 2 \pm \sqrt{-1}, \quad \pm 1 \pm 3\sqrt{-1}, \quad \pm 3 \pm \sqrt{-1}.$$

$\pm\sqrt{-1}$ ne convient pas ; cela se voit à l'inspection de l'équation comparée avec $x^2 + 1$.

On a $f(1) = -52$, $f(-1) = -36.1$.

Pour $a = -1$,	$b = 1$,	on a $(1 + a)^2 + b^2 = 5$,	qui ne divise pas $f(-1)$.	Rejet de	$1 \pm \sqrt{-1}$.
$a = -1$	$b = 1$,	$(1 - a)^2 + b^2 = 5$,	$f(1)$.		$1 \pm \sqrt{-1}$.
Pour $a = 1$,	$b = 2$, il vient	$(1 + a)^2 + b^2 = 8$,	$f(-1)$.		$-1 \pm 2\sqrt{-1}$.
$a = -1$,	$b = 2$, donne	$(1 - a)^2 + b^2 = 8$,	$f(1)$.		$-1 \pm 2\sqrt{-1}$.
Pour $a = 2$,	$b = 1$,	$(1 + a)^2 + b^2 = 10$,	$f(-1)$.		$-2 \pm \sqrt{-1}$.
$a = -2$,	$b = 1$,	$(1 - a)^2 + b^2 = 10$,	$f(1)$.		$-2 \pm \sqrt{-1}$.
$a = 1$,	$b = 3$,	$(1 + a)^2 + b^2 = 13$,	$f(-1)$.		$-1 \pm 3\sqrt{-1}$.
$a = -1$,	$b = 3$,	$(1 - a)^2 + b^2 = 13$,	qui divise $f(1)$.	A essayer	$1 \pm 3\sqrt{-1}$.
$a = 3$,	$b = 1$,	$(1 + a)^2 + b^2 = 17$,	ne divise pas $f(-1)$.	Rejet de	$3 \pm \sqrt{-1}$.
$a = -3$,	$b = 1$,	$(1 - a)^2 + b^2 = 17$,	$f(1)$.	Rejet.	

Il ne reste que $-1 \pm 3\sqrt{-1}$, ou le facteur $x^2 - 2x + 10$, qui, en effet, divise fx, et donne pour quotient

$$x^6 - 3x^4 + 2x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Aucun des nombres ci-dessus essayés ne peut convenir à cette équation ; de plus, nous allons prouver qu'une équation de la forme

$$x^m - p_1 x^{m-1} - \ldots - p_m = 0.$$

p_1, p, etc. étant entiers réels, n'a point de racines complexes fractionnaires.

10. En effet, soit un couple

$$x = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{d}\sqrt{-1},$$

où a, b, c, d sont entiers ; $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$ irréductibles.

Le facteur correspondant à ces deux racines est

$$x^2 - \frac{2a}{c}x + \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2}.$$

Si $\frac{a}{c}$ était entier, $\frac{b}{d}$ ne l'étant pas, $\frac{b^2}{d^2}$ ne le serait pas, et $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2}$ serait fractionnaire.

Si $\frac{b}{d}$ était entier, $\frac{a}{c}$ serait fractionnaire, ainsi que $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2}$.

Admettons que $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$ soient fractionnaires tous les deux ; je dis que l'un des coefficients du diviseur du second degré l'est au moins. Car, pour que $\frac{2a}{c}$ soit entier, il faut que $c = 2$, et le dernier terme devient $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{d^2}$. Si d est pair, b ne l'est pas. Supposons $d = 2d'$; on a

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{d^2} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4d^2} = \frac{a^2d'^2 + b^2}{4d'^2}.$$

Or, b étant impair, b^2 est de la forme $4k + 1$, et $a^2d'^2$, qui est un carré, est de l'une des formes $4k'$, $4k' + 1$. Donc le numérateur n'est pas divisible par 4, et le terme n'est pas entier. Que si d est impair, notre dernier terme devient $\frac{a^2d^2 + 4b^2}{4d^2}$: mais a et d étant impairs, le carré a^2d^2 est de la forme $4k + 1$, et l'expression n'est pas entière. Donc le facteur du second degré a au moins un terme fractionnaire, et si on le ramène à la forme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, β et γ ne sont pas tous les deux divisibles par α.

Il s'ensuit, 1° que l'équation (1) n'a plus de racines commensurables complexes ; 2° que la recherche des racines complexes fractionnaires se ramène à celle des racines complexes entières.

11. Nous allons maintenant chercher si l'équation (1) a des racines incommensurables du second degré de la forme $a + \sqrt{b}$, a et b étant entiers. Ces sortes de racines correspondent à des facteurs tels que $x^2 + px + q$, où p et q sont entiers. Une équation telle que

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots = 0$$

peut avoir de pareils facteurs, ou p et q sont fractionnaires ; on ramène la question au cas des nombres entiers.

Si notre équation (1) admet le facteur $x^2 + px + q$, c'est que q est un diviseur du dernier terme de l'équation (1); on essayera donc successivement tous les diviseurs du dernier terme : ils sont $+1$, -1. Essayons $+1$: cet essai revient à diviser l'équation (1) par x^2+px+1 : on arrivera à un reste

$$xFp + F_1p = 0,$$

et les équations

$$Fp = 0, \quad F_1p = 0$$

devront admettre une racine entière commensurable, sinon $q = 1$ ne convient pas. C'est ce qui arrive ici. On essaye ensuite $q = -1$. Voici le calcul :

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x - 1 & x^2 + px - 1 \\
\hline
x^4 (-p - 3) + 3x^3 & x^2 + x^2(-p - 3) + x(p^2 + 3p + 3) - p - 3p^2 - 4p - 3, \\
x^3 (p^2 + 3p + 3) + x^2(-p - 3), & \\
x^2(-p^3 - 3p^2 - 4p - 3) + x(p^2 + 3p), & \\
x(p^4 + 3p^3 + 5p^2 + 6p) - p^3 - 3p^2 - 4p - 4. &
\end{array}$$

On cherche les racines entières du dernier coefficient; il vient $p = -2$, qui annule aussi l'autre.

Donc notre équation admet le facteur $x^2 - 2x - 1$, et de plus le facteur $x^3 - x^2 + x + 1$. Ce dernier n'a point de diviseur commensurable du second degré.

On peut aussi chercher les diviseurs commensurables du troisième, du quatrième, etc., degré. Le parti à tirer de cela est facile à reconnaître.

Application de la théorie des transcendantes elliptiques à la rectification d'une classe étendue de courbes planes;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. Si d'un point fixe on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes d'une courbe donnée, la position de la tangente en un point de la courbe qui est le lieu géométrique des pieds de ces perpendiculaires, peut être déterminée par la construction suivante.

Soient O le point fixe, et OQ la perpendiculaire abaissée de ce point sur la tangente en un point P de la courbe donnée; la tangente QR à la courbe lieu des points Q fera avec OQ un angle OQR égal à OPQ et situé d'un même côté de la tangente PQ.

Pour le démontrer, soient P et P′ deux points consécutifs de la courbe donnée, Q et Q′ les pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les tangentes en ces points, QQ′ sera l'élément de la nouvelle courbe, et coïncidera, par suite, avec sa tangente; d'ailleurs le quadrilatère OQ′QP est inscriptible dans un cercle, et, par conséquent, l'angle OQQ′ est égal à OPQ′ ou à OPQ.

Il résulte de là que si r et ω désignent les coordonnées polaires d'un point de la courbe donnée, r_1 et ω_1 celles du point correspondant de la courbe *dérivée*, on aura

$$r\frac{d\omega}{dr} = r_1\frac{d\omega_1}{dr_1}.$$

2. Cela posé, concevons que l'on fasse dériver d'une courbe donnée quelconque, une série de courbes se succédant d'après la même loi, et proposons-nous de trouver une formule pour la rectification d'une quelconque des courbes de cette série.

Désignons par r et ω les coordonnées polaires d'un point quelconque de la courbe donnée, que nous appellerons courbe primitive, par r_n et ω_n celles de la courbe qui occupe le $n^{ième}$ rang dans la série des courbes dérivées, et par s_n l'arc de cette dernière courbe, on aura

$$ds_n = \left[1 + r_n^2 \left(\frac{d\omega_n}{dr_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dr_n = \left(1 + r^2 \frac{d\omega^2}{dr^2}\right)^{\frac{1}{2}} dr_n.$$

D'ailleurs, si θ désigne l'angle dont la tangente est $r\frac{d\omega}{dr}$ et qui est celui que forme la tangente à la courbe primitive avec le rayon vecteur r, on aura évidemment

$$r_n = r \sin^n \theta,$$

d'où

$$dr_n = \sin^n \theta \left(1 + nr \operatorname{cotang} \theta \frac{d\theta}{dr}\right) dr$$

$$= \frac{nr\frac{d^2\omega}{dr^2} + (n+1)\frac{d\omega}{dr} + r^2\frac{d\omega^3}{dr^3}}{\left(1 + r^2\frac{d\omega^2}{dr^2}\right)^{\frac{n+2}{2}}} \left(r\frac{d\omega}{dr}\right)^{n-1} r dr;$$

et, par conséquent,

$$\text{A)} \qquad ds_n = \frac{nr\frac{d^2\omega}{dr^2} + (n+1)\frac{d\omega}{dr} + r^2\frac{d\omega^3}{dr^3}}{\left(1 + r^2\frac{d\omega^2}{dr^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \left(r\frac{d\omega}{dr}\right)^{n-1} r dr.$$

3. Concevons maintenant une courbe qui soit constamment touchée par les perpendiculaires menées aux extrémités des rayons vecteurs d'une courbe donnée; supposons que de cette nouvelle courbe on en fasse dériver une troisième par une méthode semblable de génération, et ainsi à l'infini, et proposons-nous de rectifier une quelconque des courbes de cette nouvelle série. Cela revient évidemment à exprimer la longueur de l'arc s de la courbe primitive, en fonction des coordon-

nées r_n, ω_n de la courbe dérivée d'ordre n; or on a

$$ds = \left(1 + r^2 \frac{d\omega^2}{dr^2}\right)^{\frac{1}{2}} dr = \left[1 + r_n^2 \left(\frac{d\omega_n}{dr_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dr.$$

et en désignant, comme précédemment, par θ l'angle dont la tangente est $r_n \frac{d\omega_n}{dr_n}$,

$$r = r_n \operatorname{coséc}^n \theta,$$

d'où l'on conclut, après quelques réductions,

$$ds = \frac{-nr_n \frac{d^2\omega_n}{dr_n^2} - (n-1)\frac{d\omega_n}{dr_n} + r_n^2 \frac{d^3\omega_n}{dr_n^3}}{\left(r_n \frac{d\omega_n}{dr_n}\right)^{n+1}} \left(1 + r_n^2 \frac{d\omega_n^2}{dr_n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} r_n dr_n.$$

4. Si l'on compare cette expression avec la valeur de ds_n écrite plus haut, on verra facilement que, pour rectifier une quelconque des courbes de la nouvelle série que nous venons de considérer, il suffira de changer le signe de n dans l'équation A. Cette remarque suggère une notation que nous croyons convenable et expressive, et qui consiste à représenter par r_{-n}, ω_{-n}, s_{-n} les coordonnées polaires et l'arc de la n^{ieme} courbe de la série dérivée suivant la méthode du n° **3**; nous pouvons donc appeler ces courbes les courbes du système négatif, ou simplement les courbes *négatives*, en donnant le nom de courbes *positives* à celles obtenues par la construction que nous avons mentionnée en premier lieu.

5. Nous allons maintenant procéder à quelques applications de notre formule, et nous prendrons d'abord pour courbe primitive une ellipse ayant pour centre l'origine fixe. Si l'on prend pour unité le demi-grand axe de l'ellipse et que l'on représente par b et c le demi-petit axe et l'excentricité, on aura

$$b^2 + c^2 = 1.$$

et l'équation de l'ellipse sera

$$r\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \omega} = b.$$

l'angle ω étant compté à partir du petit axe : on déduit de là

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{b}{r\sqrt{(1-r^2)(r^2-b^2)}}.$$

$$r\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{d\omega}{dr} = \frac{br(2r^2-1-b^2)}{[(1-r^2)(r^2-b^2)]^{\frac{3}{2}}};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (A), il vient, après quelques réductions,

$$\text{(B)} \qquad ds_n = \frac{nr^2-(n-1)(1+b^2-r^2)}{r^{n-1}(1+b^2-r^2)^{\frac{n-1}{2}}}\,\frac{b^n\,dr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-b^2)}}.$$

6. Si n est impair, le multiplicateur de dr dans le second membre de l'équation (B) est une fonction rationnelle de r^2, divisée par la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en r, ce qui montre que, dans ce cas, s_n appartient visiblement à la classe des fonctions elliptiques.

Afin de réduire l'expression de la différentielle ds_n à une forme semblable quel que soit n, posons

$$r^2 = b^2 + c^2\rho^2,$$

ρ étant une nouvelle variable dont les limites sont 0 et 1, nous aurons

$$\text{(C)} \qquad ds_n = \frac{n(b^2+c^2\rho^2)-(n-1)(1-c^2\rho^2)}{(b^2+c^2\rho^2)^{\frac{n}{2}}(1-c^2\rho^2)^{\frac{n}{2}}}\,\frac{b^n\,d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-c^2\rho^2)}}.$$

7. Supposons d'abord $n = 0$, ce qui revient à considérer l'ellipse primitive elle-même; l'équation (C) donne, après avoir mis $\sin\varphi$ au lieu de ρ,

$$ds = \sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad \text{d'où} \quad s = \mathrm{E}(c, \varphi).$$

Pour $n = 1$, l'équation (B) nous donne

$$ds_1 = \frac{br^2}{1+b^2-r^2}\,\frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-b^2)}};$$

d'ailleurs, de l'équation de l'ellipse on tire

$$\frac{r^2}{1+b^2-r^2} = \frac{b^2}{1-(1-b^2)\sin^2\omega},$$

et

$$\frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-b^2)}} = \frac{d\omega}{\sqrt{1-c^2\sin^2\omega}}.$$

en sorte que l'on aura

$$ds_1 = \frac{b^2}{1-(1-b^2)\sin^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{\sqrt{1-c^2\sin^2\omega}},$$

et, en employant la notation des transcendantes elliptiques,

$$s_1 = b^3\,\Pi(-1+b^2, c, \omega).$$

On déduit de là que l'arc de la première courbe positive, compté à partir de l'extrémité du petit axe, est exprimé par une fonction elliptique de troisième espèce à paramètre *circulaire*.

8. Supposons maintenant $n = 2$, l'équation (C) nous donne

$$ds_2 = \left(\frac{2}{1-c^2\rho^2} - \frac{1}{b^2+c^2\rho^2}\right)\frac{b^2\,d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-c^2\rho^2)}},$$

ou, en posant $\rho = \sin\varphi$,

$$ds_2 = \frac{2b^2\,d\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1+\frac{c^2}{b^2}\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}};$$

d'où, en observant que

$$b^2\int\frac{d\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{E}(c, \varphi) - \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},$$

$$s_2 = 2\,\mathrm{E}(c, \varphi) - \Pi\left(\frac{c^2}{b^2}, c, \varphi\right) - \frac{2c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Legendre a démontré que deux fonctions de la troisième espèce ayant même module et même amplitude, et dont les paramètres n et $-m$ sont liés par la relation

$$(1+n)(1-m) = b^2,$$

où b désigne le complément du module c, peuvent s'exprimer l'une par l'autre, à l'aide de l'équation suivante [*] :

$$1 + b^2 \Pi\left(\frac{c^2}{b^2}, c, \varphi\right) - b^4 \Pi(-1 + b^4, c, \varphi) - b^2 F(c, \varphi)$$
$$= b\sqrt{1 + b^2} \operatorname{arc\,tang} \frac{c^2 \sqrt{1 + b^2} \sin\varphi \cos\varphi}{b\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}}.$$

où l'on fait

$$n = \frac{c^2}{b^2}, \quad -m = -1 + b^4.$$

Il suit de là qu'on peut remplacer la fonction de troisième espèce, qui se trouve dans l'expression de l'arc de la seconde courbe positive, par une fonction identique par le paramètre et le module à celle qui donne la valeur de l'arc de la première courbe positive.

9. Soit $n = -1$, l'équation (B) donnera, en représentant par R la quantité $(1 - r^2)(r^2 - b^2)$.

$$b\,ds_{-1} = [2(1 - b^2)r^2 - 3r^4]\frac{dr}{\sqrt{R}};$$

on a d'ailleurs

$$r\sqrt{R} = -b^2 \int \frac{dr}{\sqrt{R}} - 2(1 - b^2)\int \frac{r\,dr}{\sqrt{R}} - 3\int \frac{r^3\,dr}{\sqrt{R}}.$$

ce qui donne

$$b s_{-1} = r\sqrt{R} + b^2 \int \frac{dr}{\sqrt{R}}.$$

Si l'on y remplace r par sa valeur tirée de l'équation de l'ellipse, cette équation devient

$$s_{-1} = \frac{bc^2 \sin\omega \cos\omega}{(1 - c^2 \sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}} + bF(c, \omega).$$

La courbe dont nous venons de nous occuper est celle dont M. Talbot a donné la rectification dans une Lettre adressée à M. Ger-

[*] LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques*, tome I, chap. XV, page 54.

gonne, et insérée dans les *Annales de Mathématiques*, tome XIV, page 380. Legendre a aussi observé que l'arc de cette courbe fournit une représentation de la fonction elliptique de première espèce. (*Traité des fonctions elliptiques*, tome II, page 590.)

Si l'on fait $n = -2$, on aura

$$b^2 ds_{-2} = (3 - 2b^2 - 5c^2\rho^2)(1 - c^2\rho^2)(b^2 + c^2\rho^2)\frac{d\rho}{\sqrt{P}},$$

en représentant, pour abréger, par P le polynôme $(1 - \rho^2)(1 - c^2\rho^2)$.

On a d'ailleurs

$$\rho^3\sqrt{P} = 3\int\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{P}} - 4(1 + c^2)\int\frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{P}} + 5c^2\int\frac{\rho^6 d\rho}{\sqrt{P}},$$

$$\rho\sqrt{P} = \int\frac{d\rho}{\sqrt{P}} - 2(1 + c^2)\int\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{P}} + 3c^2\int\frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{P}},$$

ce qui donne

$$ds_{-2} = \frac{c}{b^2}d(\rho^3\sqrt{P}) + c^2 d(\rho\sqrt{P}) + (1 + c^2 - 3c^2\rho^2)\frac{d\rho}{\sqrt{P}};$$

si l'on met $\sin\varphi$ au lieu de ρ, dans cette expression, et qu'on intègre ensuite, on aura

$$s_{-2} = 3E(c, \varphi) - (1 + b^2)F(c, \varphi)$$
$$+ c^2\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \frac{c^2}{b}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}.$$

10. Si l'on représente par S le quadrant de l'ellipse, par S_{-1}, S_{-2} les quadrans des deux premières courbes du système négatif, on aura

$$S = E,$$
$$S_{-1} = bF,$$
$$S_{-2} = 3E - (1 + b^2)F,$$

d'où résulte la relation suivante entre les trois quadrants S, S_{-1}, S_{-2} :

$$(1 + b^2)S_{-1} = b(3S - S_{-2}).$$

On a vu, au n° **8**, que la longueur S_2 du quadrant de la seconde

courbe positive est donnée par l'équation

$$S_2 = 2E - \Pi\left(\frac{c^2}{b^2}\right);$$

mais on a

$$(1 + b^2)\,\Pi\left(\frac{c^2}{b^2}\right) - b^4\,\Pi - 1 - b^4 - b^2 F = 0,$$

et, en vertu du n° **7**,

$$S_1 = b^3\,\Pi(-1 - b^4),$$

en sorte que l'on aura

$$b\,(S_1 + S_{-1}) = (1 + b^2)(2S - S_2).$$

On obtient encore aisément la relation suivante entre les quadrants de la courbe donnée et de ses deux premières dérivées, tant positives que négatives :

$$S_{-1} + S_1 + S_{-1} = 3S - S_{-2} - (2S - S_2).$$

On voit qu'elle est indépendante de l'excentricité de la courbe primitive.

11. L'inspection des équations (B) et (C) nous montre que, pour toutes les valeurs négatives de n, la quantité qui multiplie $\frac{dr}{\sqrt{R}}$ ou $\frac{d\rho}{\sqrt{P}}$ sera une fonction rationnelle et entière de r^2 ou de ρ^2, en sorte que les arcs de toutes les courbes négatives s'exprimeront à l'aide des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce seulement, et par conséquent à l'aide des arcs de l'ellipse et de la première dérivée négative. Il n'en sera pas ainsi pour les valeurs positives de n; dans ce cas, s_n contiendra un terme de la forme

$$\int \frac{1}{1 + \frac{c^2}{b^2}\rho^2}\,\frac{d\rho}{\sqrt{P}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{1}{1 - (1 - b^2)\sin^2\omega}\,\frac{d\omega}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\omega}},$$

selon que n sera pair ou impair.

Ainsi que nous l'avons dit précédemment, la première de ces intégrales est réductible à la seconde qui exprime la valeur de s_1, d'où il résulte que la rectification de toutes les courbes positives dépend seu-

lement de la rectification de l'ellipse et des deux premieres courbes dérivées tant positives que négatives.

12. Nous considérerons maintenant l'hyperbole ayant pour centre l'origine fixe. Soient b le demi-axe imaginaire, c le demi-axe réel, l'excentricité étant prise pour unité, en sorte que

$$b^2 + c^2 = 1;$$

l'équation de l'hyperbole sera

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\omega}{c^2} - \frac{\sin^2\omega}{b^2}.$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{bc}{r\sqrt{r^2+b^2}\sqrt{r^2-c^2}},$$

$$r\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{d\omega}{dr} = -\frac{bcr(2r^2+b^2-c^2)}{[(r^2+b^2)(r^2-c^2)]^{\frac{3}{2}}}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (A) nous donne, après quelques réductions,

$$ds_n = \frac{nr^2+(n-1)(r^2+b^2-c^2)}{r^{n-1}(r^2+b^2-c^2)^{\frac{n-1}{2}}}\,\frac{b^n c^n dr}{\sqrt{r^2+b^2}\sqrt{r^2-c^2}}.$$

Cette formule montre que la rectification des courbes dérivées ne dépend que des fonctions elliptiques, si n est impair; si n est pair, nous poserons

$$r^2 + b^2 - c^2 = b^2c^2\rho^2,$$

et la valeur de ds_n sera

$$ds_n = \frac{(n-1)b^2c^2\rho^2 + n(b^2c^2\rho^2+c^2-b^2)}{\rho^n(b^2c^2\rho^2+c^2-b^2)^{\frac{n}{2}}}\,\frac{d\rho}{\sqrt{b^2\rho^2+1}\sqrt{c^2\rho^2-1}}.$$

Cette seconde formule, que nous emploierons pour la rectification des dérivées d'ordres pairs, fait voir que cette rectification ne dépend non plus que des fonctions elliptiques.

Il est bon de remarquer que la nouvelle variable ρ que nous intro-

duisons, est l'inverse de la perpendiculaire abaissée du centre de l'hyperbole sur la tangente à l'extrémité du rayon vecteur r.

13. Soit $n = 0$; en faisant $c\rho = \text{séc}\,\varphi$, on a

$$ds = \frac{b^2 d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}};$$

d'où, en intégrant,

$$s = \tang\varphi\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi} + b^2 F(c, \varphi) - E(c, \varphi);$$

expression qui coïncide avec celle donnée par Legendre, pour l'arc d'hyperbole. (*Traité des fonctions elliptiques*, tome I, page 16.)

Soit $n = 1$, on aura

$$ds_1 = \frac{bcr^2}{r^2 + b^2 - c^2}\,\frac{dr}{\sqrt{(r^2 + b^2)(r^2 - c^2)}}.$$

et, en posant $r = c\,\text{séc}\,\varphi$,

$$ds_1 = \frac{c}{b}\,\frac{1}{1 + \frac{c^2 - b^2}{b^2}\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - b^2\sin^2\varphi}},$$

d'où

$$s_1 = \frac{c}{b}\,\Pi\left(\frac{c^2 - b^2}{b^2}, b, \varphi\right).$$

Ce qui montre que l'arc de la première courbe dérivée positive est exprimé par une fonction elliptique de la troisième espèce, dont le paramètre est circulaire si l'on a $c > b$, c'est-à-dire si l'axe imaginaire est inférieur à l'axe réel. Si, au contraire, c est $< b$, ce paramètre appartient évidemment à la forme logarithmique fondamentale.

14. Soit $n = 2$, on aura

$$ds_2 = \left(\frac{b^2c^2}{b^2c^2\rho^2 + c^2 - b^2} + \frac{2}{\rho^2}\right)\frac{d\rho}{\sqrt{(b^2\rho^2 + 1)(c^2\rho^2 - 1)}};$$

et, en posant $c\rho = \text{séc}\,\varphi$, il vient, après quelques réductions,

$$s_2 = 2E(c, \varphi) - \frac{b^2(2b^2 - c^2)}{b^2 - c^2}F(c, \varphi) + \frac{b^4}{b^2 - c^2}\Pi\left(\frac{b^2 - c^2}{c^2}, c, \varphi\right)$$

On doit observer que la fonction de troisième espece, qui entre dans cette expression, a un module complémentaire de celle qui donne la valeur de s_1, et que les conditions qui déterminent le caractere du paramètre comme circulaire ou logarithmique, sont, dans les deux cas, précisément opposées; on voit, en effet, que la fonction de troisieme espèce, qui entre dans s_2, exprime la longueur de l'arc de la premiere dérivée positive de l'hyperbole conjuguée dont l'axe réel serait $2b$ et l'axe imaginaire $2c$.

En se reportant à la formule générale, on verra facilement que, dans l'hyperbole de même que dans l'ellipse, toutes les dérivées negatives auront leurs arcs exprimables par des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce seulement, ce qui n'a pas lieu pour les dérivées positives; car si n est positif, s_n contiendra, dans son expression, un terme de la forme

$$\int \frac{1}{r^2+b^2-c^2}\frac{dr}{\sqrt{(r^2-b^2)(r^2-c^2)}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{1}{b^2(z^2-c^2-b^2)}\frac{dz}{\sqrt{(b^2z^2-1)(c^2z^2-1)}},$$

selon que n sera impair ou pair.

Ces intégrales ne sont autre chose que les fonctions de troisieme espèce

$$\Pi\left(\frac{b^2-c^2}{c^2}, c, z\right), \quad \Pi\left(\frac{c^2-b^2}{b^2}, b, z\right),$$

mutuellement irréductibles, l'une ayant un parametre logarithmique, et l'autre un paramètre circulaire.

15. Nous nous proposons, maintenant, d'étudier d'une maniere plus particulière les courbes qui dérivent de l'hyperbole équilatere; elles nous offriront quelques résultats curieux et dignes d'intérêt. En premier lieu, les équations de ces courbes, tant positives que négatives, peuvent être facilement obtenues.

Soient C le centre de l'hyperbole équilatère, P un point quelconque de cette courbe, et CP_1 une perpendiculaire abaissée sur la tangente au point P; par le point P_1 menons une ligne P_1P_2 faisant l'angle $CP_1P_2 = CPP_1$, abaissons de même CP_2 perpendiculaire sur P_1P_2, et faisons l'angle $CP_2P_3 = CPP_1$, et ainsi de suite; il est évident, d'apres la construction donnée au n° **1**, que les points P_1, P_2, P_3,..., P_n engen-

dreront la première, la seconde,..., la $n^{ième}$ courbe dérivée du système positif.

D'ailleurs, les angles PCP_1, P_1CP_2, P_2CP_3,..., sont évidemment égaux entre eux, et, d'après une propriété connue de l'hyperbole équilatère, l'angle PCP_1 est divisé en deux parties égales par l'axe focal CV de cette courbe; si donc on désigne par r la distance CP, par ω l'angle VCP, et de même par r_n et ω_n la distance CP_n et l'angle VCP_n, on aura

$$\omega_n = (2n-1)\omega, \quad \text{et} \quad r_n = r\cos^n 2\omega;$$

or l'équation de l'hyperbole est

$$r^2 \cos 2\omega = 1,$$

et l'on aura, par suite, pour l'équation de la $n^{ième}$ dérivée positive,

$$r_n^{\frac{2}{2n-1}} = \cos\left(\frac{2\omega_n}{2n-1}\right).$$

16. Par le même point de l'hyperbole équilatère, concevons une ligne PP_{-1} perpendiculaire à CP, et par le point C une droite CP_{-1} faisant, avec la première, un angle $CP_{-1}P$ égal à CPP_1; et de même, ayant mené une perpendiculaire à CP_{-1}, soit fait l'angle $CP_{-2}P_{-1}$ égal à $CP_{-1}P$, et ainsi de suite; il est évident que les points P_{-1}, P_{-2},... engendreront les différentes courbes dérivées du système négatif, et si l'on désigne par r_{-n} et ω_{-n} la distance CP_{-n} et l'angle VCP_{-n}, on trouvera aisément, pour l'équation de la $n^{ième}$ dérivée négative,

$$r_{-n}^{\frac{2}{2n-1}} \cos\left(\frac{2\omega_{-n}}{2n+1}\right) = 1;$$

d'où il résulte que les courbes des deux systèmes peuvent être représentées par l'équation unique

$$r_{\pm n}^{\frac{2}{\pm 2n-1}} = \cos\left(\frac{2\omega_{\pm n}}{\pm 2n-1}\right).$$

17. On trouve aisément que la rectification d'une quelconque des

courbes positives dépend de la formule

$$ds_n = \left(\cos\frac{2\omega_n}{2n-1}\right)^{\frac{2n-3}{2}} d\omega_n,$$

d'où l'on déduit, en posant $\sin\varphi = \sqrt{2}\sin\frac{\omega_n}{2n-1}$,

$$s_n = \frac{2n-1}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{(\cos\varphi)^{2n-3}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\,d\varphi,$$

l'arc étant compté à partir du sommet commun de toutes les courbes, qui est aussi celui de l'hyperbole.

Cela posé, on a identiquement

$$2\sin\varphi\,(\cos\varphi)^{2n-3}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}$$

$$= (2n-1)\int\frac{\cos^{2n}\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\,d\varphi - (2n-3)\int\frac{\cos^{2n-2}\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\,d\varphi.$$

D'ailleurs

$$\int\frac{\cos^{2n}\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2n+1}\,s_{n+1},$$

$$\int\frac{\cos^{2n-2}\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2n-3}\,s_{n-1},$$

en sorte que les deux arcs correspondants de la $n-1^{ième}$ et de la $n+1^{ième}$ courbe positive seront liés entre eux par la relation simple

$$\sqrt{2}\sin\varphi\,(\cos\varphi)^{2n-3}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi} = \frac{2n-1}{2n+1}\,s_{n+1} - s_{n-1},$$

qui devient, dans le cas des quadrants complets S_{n-1} et S_{n+1},

$$\frac{S_{n+1}}{S_{n-1}} = \frac{2n-1}{2n+1}.$$

On voit, d'après cela, que la rectification de toutes les courbes po-

sitives d'ordre impair ne dépend que de celle de la première de ces courbes que l'on sait être la lemniscate de Bernoulli, et dont l'arc s_1 est exprimé par une fonction elliptique de première espèce et de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La rectification des courbes d'ordre pair ne dépendra que de la détermination de s_2; or on a

$$ds_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

donc

$$s_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\left[2\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)\right].$$

D'ailleurs, si s désigne l'arc de l'hyperbole correspondant à l'angle polaire ω, on trouve aisément, en posant $\sin\varphi = \sqrt{2}\sin\omega = \sqrt{2}\sin\frac{\omega}{3}$,

$$\sqrt{2}\tang\varphi\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)\right] + s.$$

et, par conséquent,

$$s_2 = 3\left(\sqrt{2}\tang\varphi\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi} - s\right).$$

La partie algébrique $\sqrt{2}\tang\varphi\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}$, qui entre dans cette équation, n'est autre chose que la portion de tangente à l'hyperbole à l'extrémité de l'arc s, comprise entre cette extrémité et le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur sa direction : nous l'appellerons, pour abréger, *longueur de la tangente de l'arc hyperbolique;* en sorte que l'équation précédente exprimera qu'un arc quelconque de la seconde courbe positive, compté à partir du sommet, est égal à trois fois la différence entre l'arc hyperbolique correspondant et sa tangente, et, par conséquent, que la longueur entière d'un quadrant de la seconde courbe positive est égale à trois fois la différence entre l'arc hyperbolique indéfini et son asymptote.

18. Si P_{n-1} et P_n désignent les points correspondants de la $n-1^{ième}$ et de la $n^{ième}$ courbe positive, la quantité algébrique qui entre dans la relation entre s_{n-1} et s_{n+1}, du n° **16**, n'est autre chose que la droite $P_{n-1}P_n$, c'est-à-dire la portion de la tangente à la $(n-1)^{ième}$ courbe, comprise entre le point de contact et le point où elle rencontre la $n^{ième}$ courbe; en effet, le carré de cette distance a pour expression

$$r_{n-1}^2 - r_n^2 = \cos^{2n-3}\left(\frac{2\omega_{n-1}}{2n-3}\right) - \cos^{2n-1}\left(\frac{2\omega_n}{2n-1}\right).$$

D'ailleurs

$$\cos^2\varphi = \cos\frac{2\omega_{n-1}}{2n-3} - \cos\frac{2\omega_n}{2n-1}.$$

donc

$$P_{n-1}P_n = \sqrt{2}\sin\varphi\cos^{2n-3}\varphi\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}.$$

D'après cela, si P_{n-1}, P_n, P_{n+1} sont trois points correspondants de la $n-1^{ième}$, de la $n^{ième}$ et de la $(n+1)^{ième}$ courbe, et V leur sommet commun, on aura

$$\text{arc } VP_{n-1} + \text{ligne droite } P_{n-1}P_n = \frac{2n-1}{2n+1}\text{ arc } VP_{n+1}.$$

Cette propriété peut être démontrée d'une manière très-simple à l'aide des deux propositions suivantes :

I. Soient VPQ une courbe quelconque, et OP_1 une perpendiculaire abaissée d'un point fixe O sur la tangente en un point P quelconque; si l'on désigne par r_1 le rayon OP_1, et par ω_1 l'angle VOP_1, la somme de l'arc VP_1 et de la droite PP_1 sera exprimée par l'intégrale $\int r_1 d\omega_1$.

La démonstration de ce théorème se trouve dans la plupart des Traités de calcul intégral; il peut être aussi déduit de notre formule fondamentale (A) en faisant $n = -1$.

II. Soit $OP = r$, l'arc s_1 de la courbe lieu des points P_1 sera représenté par l'intégrale $\int r d\omega_1$. En effet,

$$\frac{OP}{PP_1} = \text{tang } OPP_1 = r_1\frac{d\omega}{dr}.$$

et, par conséquent,

$$PP_1 = \frac{dr_1}{d\omega_1};$$

d'ailleurs

$$ds_1 = d\omega_1 \sqrt{r_1^2 + \frac{dr_1^2}{d\omega_1^2}} = d\omega_1 \sqrt{\overline{OP_1}^2 + \overline{PP_1}^2} = r\,d\omega_1,$$

d'où

$$s_1 = \int r\,d\omega_1.$$

Considérons, maintenant, trois courbes consécutives du système positif; l'accroissement élémentaire de la somme de l'arc de la $(n-1)^{ième}$ courbe et de la portion de sa tangente terminée à la $n^{ième}$, est, d'après le théorème I, égal à $r_n\,d\omega_n$, et l'accroissement correspondant de l'arc de la $(n+1)^{ième}$ est, d'après le théorème II, égal à $r_n\,d\omega_{n+1}$, d'où il suit que le rapport de ces accroissements est $\frac{d\omega_n}{d\omega_{n+1}}$ ou $\frac{2n-1}{2n+1}$; c'est donc également le rapport des quantités finies elles-mêmes comptées à partir du sommet, puisqu'elles s'évanouissent simultanément en ce point.

De la relation

$$\frac{S_{n-1}}{S_{n+1}} = \frac{2n-1}{2n+1}.$$

donnée au n° **16**, et qui a lieu entre les quadrants complets, on déduit

$$S_3 = \frac{5}{3} S_1,$$

$$S_4 = \frac{7}{5} S_2,$$

$$S_5 = \frac{9}{7} S_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n = \frac{2n-1}{2n-3} S_{n-2},$$

$$S_{n+1} = \frac{2n+1}{2n-1} S_{n-1}.$$

et, en multipliant ces équations membre à membre,

$$S_n S_{n+1} = \frac{2n+1}{3} S_1 S_2.$$

Cela posé, on a la relation connue entre les fonctions complètes de modules complémentaires,

$$F(b) E(c) + F(c) E(b) - F(b) F(c) = \frac{\pi}{2} \text{ [*]},$$

laquelle, dans le cas de $b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, se réduit à

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{\pi}{2}.$$

D'ailleurs

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$S_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

donc

$$S_1 S_2 = \frac{3}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{3}{4}\pi;$$

d'ou l'on déduit cette relation remarquable entre les quadrants complets de deux courbes positives consécutives,

$$S_n S_{n+1} = \frac{2n+1}{4}\pi.$$

On reconnaîtra aisément que les arcs des courbes négatives ne renferment, dans leur expression, que des fonctions de la premiere et de la seconde espece de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et qu'il existe entre ces arcs des relations analogues à celles que nous avons démontrées pour les courbes du systeme positif.

[*] LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques*, tome I, page 60.

NOTE

Sur la transformation et l'intégration d'une classe d'équations différentielles simultanées à plusieurs variables;

Par M. E. BRASSINNE,
Professeur à l'École d'Artillerie de Toulouse.

1. La transformation des coordonnées est fréquemment employée dans l'application de l'algèbre à la géométrie, pour ramener à des formes simples les équations des lignes courbes et des surfaces courbes; des transformations et des simplifications analogues ont lieu pour une classe d'équations différentielles d'une forme très-générale, dont l'étude fait le sujet de cette Note.

Considérons un système de n équations simultanées du second ordre de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} + m.\psi(s)\dfrac{ds}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dt} + k'\,\varphi(s) = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + m.\psi(s)\dfrac{ds}{dt}\cdot\dfrac{dy}{dt} + k''\,\varphi(s) = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + m.\psi(s)\dfrac{ds}{dt}\cdot\dfrac{dz}{dt} + k'''\,\varphi(s) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^2u}{dt^2} + m.\psi(s)\dfrac{ds}{dt}\cdot\dfrac{du}{dt} + k^{(n)}\,\varphi(s) = 0. \end{array}\right.$$

Ces équations renferment $(n+1)$ variables $x, y, z, \ldots, u, t$; les n premières sont regardées comme fonctions de la dernière t; on suppose, de plus, que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + \ldots + du^2},$$

et que, par conséquent,

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + \ldots + du^2};$$

$\varphi(s)$ et $\psi(s)$ sont des fonctions quelconques de s.

Nous allons prouver que les équations (1) peuvent se ramener à un groupe de même forme, mais dans lequel les $(n-1)$ premieres équations seront privées de leur dernier terme. Pour arriver à ce résultat, nous supposerons

$$(2) \quad \begin{cases} x = a'x' + b'y' + c'z' + \ldots + h'u', \\ y = a''x' + b''y' + c''z' + \ldots + h''u', \\ z = a'''x' + b'''y' + c'''z' + \ldots + h'''u', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u = a^{n}x' + b^{n}y' + c^{n}z' + \ldots + h^{n}u'. \end{cases}$$

Disposons de h', h'', h''',..., $h^{(n)}$, de telle sorte que

$$k' = \mathrm{R}h', \quad k'' = \mathrm{R}h', \quad k''' = \mathrm{R}h''', \ldots, \quad k^{n} = \mathrm{R}h^{n}, \ldots;$$

il suffira pour cela de faire

$$\mathrm{R} = \sqrt{k'^2 + k''^2 + k'''^2 + \ldots + k^{n\,2}},$$

et

$$h' = \frac{k'}{\mathrm{R}}, \quad h'' = \frac{k''}{\mathrm{R}}, \ldots, \quad h^{n} = \frac{k^{n}}{\mathrm{R}}.$$

d'où il résultera que

$$h'^2 + h''^2 + \ldots + h^{n\,2} = 1.$$

Les valeurs de h', h'', h''',..., $h^{(n)}$ étant fixées, il restera, dans les équations (2), $n(n-1)$ quantités

$$a', \ b', \ c', \ldots, \quad a'', \ b'', \ c'', \ldots, \quad a^{n}, \ b^{n}, \ c^{n}, \ldots$$

arbitraires; pour les déterminer, prenons d'abord d'autres quantités

$$a_1, \ b_1, \ c_1, \ldots, \quad a_2, \ b_2, \ c_2, \ldots, \quad a_n, \ b_n, \ c_n, \ldots$$

qui satisfassent aux $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions suivantes:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = 0,$$
$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_n c_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_n c_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1 h' + a_2 h'' + \ldots + a_n h^{(n)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_1 h' + c_2 h'' + \ldots + c_n h^{(n)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les premiers termes de ces $\frac{n(n-1)}{2}$ équations sont les produits distincts deux à deux des n lettres a_1, b_1, $c_1, \ldots$, h'. Les termes suivants ne diffèrent des premiers que par le nombre d'accents. Les équations précédentes renfermant $n(n-1)$ arbitraires, puisque les valeurs de h', h'', $h''', \ldots$, $h^{(n)}$ ont été assignées; on pourra donc se donner $\frac{n(n-1)}{2}$ de ces quantités, et si l'on fait un choix convenable, les $\frac{n(n-1)}{2}$ indéterminées restantes dépendront de la résolution d'un système d'équations du premier degré. Ces calculs effectués, on prendra

$$a' = \mathrm{L}\, a_1, \quad a'' = \mathrm{L}\, a_2, \ldots, \quad a^{(n)} = \mathrm{L}\, a_{(n)},$$
$$b' = \mathrm{L}'\, b_1, \quad b'' = \mathrm{L}'\, b_2, \ldots, \quad b^{(n)} = \mathrm{L}'\, b_{(n)},$$
$$c' = \mathrm{L}''\, c_1, \quad c'' = \mathrm{L}''\, c_2, \ldots, \quad c^{(n)} = \mathrm{L}''\, c_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en faisant

$$\mathrm{L} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{(n)}^2}},$$

$$\mathrm{L}' = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_{(n)}^2}},$$

$$\mathrm{L}'' = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots + c_{(n)}^2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En vertu de ces hypothèses, les coefficients

$$a',\ b',\ldots,\ h',\quad a'',\ b'',\ldots,\ h'',\ldots,\quad a^{(n)},\ b^{(n)},\ldots,\ h^{(n)},$$

satisferont aux équations de condition suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} a'b' + a''b'' + \ldots + a^{(n)}b^{(n)} = 0, \\ a'c' + a''c'' + \ldots + a^{(n)}c^{(n)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'h' + a''h'' + \ldots + a^{(n)}h^{(n)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'^2 + a''^2 + \ldots + a^{(n)2} = 1, \\ b'^2 + b''^2 + \ldots + b^{(n)2} = 1, \\ c'^2 + c''^2 + \ldots + c^{(n)2} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h'^2 + h''^2 + \ldots + h^{(n)2} = 1, \end{array}\right.$$

qui sont au nombre de $\frac{n(n+1)}{2}$.

Les coefficients étant ainsi déterminés, on aura évidemment

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + u^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + \ldots + u'^2$$

et

$$dx^2 + dy^2 + \ldots + du^2 = dx'^2 + dy'^2 + \ldots + du'^2,$$

ou bien

$$ds^2 = ds'^2,$$

et, par suite,

$$s = s'.$$

Remplaçons actuellement, dans le système des équations (1), x, y, z,..., u par leurs valeurs fournies par le groupe (2), et, après la substitution, ajoutons les équations différentielles transformées, en multipliant la première par a', la deuxième par a'', la troisième par a''',..., la dernière par $a^{(n)}$; ajoutons-les de nouveau, après avoir multiplié la première par b', la deuxième par b'',..., la dernière par $b^{(n)}$, etc. On

trouvera, en tenant compte des équations de condition (3), les transformées suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x'}{dt^2} + m.\psi(s')\dfrac{ds'}{dt}\cdot\dfrac{dx'}{dt} = 0, \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} + m.\psi(s')\dfrac{ds'}{dt}\cdot\dfrac{dy'}{dt} = 0, \\ \dfrac{d^2z'}{dt^2} + m.\psi(s')\dfrac{ds'}{dt}\cdot\dfrac{dz'}{dt} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^2u'}{dt^2} + m.\psi(s')\dfrac{ds'}{dt}\cdot\dfrac{du'}{dt} + R\varphi(s') = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on peut intégrer $\psi(s')\,ds'$, les $(n-1)$ premières équations du groupe (4) conduiront à des intégrales premières de la forme

$$\frac{dx'}{dt} = Ae^{-m\mathrm{F}(s')}, \quad \frac{dy'}{dt} = Be^{-m\mathrm{F}(s')}, \dots$$

$\mathrm{F}(s')$ étant l'intégrale de $\psi(s')\,ds'$. Pour ne pas donner trop d'étendue à des transformations purement analytiques qui s'appliqueraient, comme il serait facile de le voir, à d'autres systèmes d'équations différentielles d'un ordre supérieur au second, nous nous contenterons de montrer l'utilité de notre transformation dans deux exemples; le second sera choisi dans la théorie du mouvement des projectiles.

2. Considérons les trois équations

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} + m.\dfrac{ds}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dt} + k'e^{-ns} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + m.\dfrac{ds}{dt}\cdot\dfrac{dy}{dt} + k''e^{-ns} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + m.\dfrac{ds}{dt}\cdot\dfrac{dz}{dt} + k'''e^{-ns} = 0. \end{array}\right.$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= a'x' + b'y' + c'z', \\ y &= a''x' + b''y' + c''z', \\ z &= a'''x' + b'''y' + c'''z'. \end{aligned}$$

Faisons

$$k' = \mathrm{R}c', \quad k'' = \mathrm{R}c'', \quad k''' = \mathrm{R}c'''.$$

R étant égal à $\sqrt{k'^2 + k''^2 + k'''^2}$.

Déterminons six quantités a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, au moyen des trois conditions

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0,$$
$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0,$$
$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0.$$

Si l'on se donne les quantités a_2, a_3, b_3, les autres inconnues a_1, b_1, b_2 dépendront d'équations du premier degré; on prendra ensuite pour a', a'', a''' les valeurs

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

et pour b', b'', b''',

$$\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad \frac{b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Cela fait, on parviendra par substitution, après les artifices de calcul indiqués ci-dessus, aux trois équations,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2x'}{dt^2} + m.\frac{ds'}{dt}.\frac{dx'}{dt} = 0, \\ &\frac{d^2y'}{dt^2} + m.\frac{ds'}{dt}.\frac{dy'}{dt} = 0, \\ &\frac{d^2z'}{dt^2} + m.\frac{ds'}{dt}.\frac{dz'}{dt} + \mathrm{R}e^{-ms} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux premières donnent, par l'intégration,

$$(3) \quad \frac{dx'}{dt} = \mathrm{A}e^{-ms}, \quad \frac{dy'}{dt} = \mathrm{B}e^{-ms}, \quad \text{d'où} \quad dy' = \mathrm{C}dx'.$$

Regardant z' comme fonction de x' seul, puisque, d'après les formules (3), y' peut s'exprimer au moyen de x', on posera

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dx'}.\frac{dx'}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{dz'}{dt} = p'\frac{dx'}{dt},$$

en nommant p' le rapport $\frac{dz'}{dx'}$. La substitution dans la troisième équation du groupe (2) fournit, en ayant égard aux deux premières équations de ce groupe,

$$\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{dp'}{dt} = -\mathrm{R}e^{-ns'};$$

divisant celle-ci par le carré de la première des équations (3), on aura

$$\frac{dp'}{dx'} = -\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}^2}e^{(2m-n)s'}.$$

Mais

$$ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} = dx'\sqrt{1 + \mathrm{C}^2 + p'^2}.$$

Multipliant les deux membres de l'équation (4) par cette valeur de ds', on aura

$$dp'\sqrt{1 + \mathrm{C}^2 + p'^2} = -\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}^2}e^{(2m-n)s'}ds',$$

qui, intégrée, donne

$$\sqrt{1 + \mathrm{C}^2}\left[\frac{p'}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2}}\sqrt{1 + \frac{p'^2}{1+\mathrm{C}^2}} + \log\left(\frac{p'}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2}} + \sqrt{1 + \frac{p'^2}{1+\mathrm{C}^2}}\right)\right]$$
$$= \gamma - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}^2(2m-n)}e^{(2m-n)s'},$$

γ étant la constante arbitraire. Éliminant, dans cette dernière, l'exponentielle au moyen de l'équation (4), on trouvera

$$dx' = -\frac{dp'}{(2m-n)\sqrt{1+\mathrm{C}^2}\left[\frac{p'}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2}}\sqrt{1 + \frac{p'^2}{1+\mathrm{C}^2}} + \log\left(\frac{p'}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2}} + \sqrt{1 + \frac{p'^2}{1+\mathrm{C}^2}}\right)\right]};$$

dy' vaudra ensuite $\mathrm{C}dx'$, et dz' vaudra $p'dx'$; remplaçant x', y', z' par leurs valeurs

$$x' = a'x + a''y + a'''z,$$
$$y' = b'x + b''y + b'''z,$$
$$z' = c'x + c''y + c'''z,$$

et exprimant ensuite $\frac{dz'}{dx'}$ en fonction de $\frac{dz}{dx}$, que l'on appellerait p, l'intégration des équations (1) sera ramenée aux quadratures.

3. Supposons qu'il s'agisse de trouver le mouvement d'un projectile soumis à la résistance de l'air et à l'action du vent, que nous regarderons comme une force accélératrice constante d'intensité et de direction. Si cette force agit dans le plan vertical de la trajectoire, elle se combinera avec la gravité, et, en admettant que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse que le projectile possède à chaque instant, les équations du mouvement auront la forme

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + C.\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + k = 0,\quad \frac{d^2y}{dt^2} + C.\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + k' = 0.$$

Remplaçons, dans ces équations, k et k' par $m\cos\alpha$ et $m\sin\alpha$, m étant égal à $\sqrt{k^2+k'^2}$ et $\tang\alpha$ étant égal à $\frac{k}{k'}$; posons ensuite

$$x = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \quad\text{et}\quad y = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha,$$

les équations (1) deviendront

$$-\frac{d^2x'}{dt^2}\sin\alpha + \frac{d^2y'}{dt^2}\cos\alpha$$
$$+ C.\frac{ds'}{dt}\left(-\frac{dx'}{dt}\sin\alpha + \frac{dy'}{dt}\cos\alpha\right) - m\cos\alpha = 0,$$

$$+\frac{d^2x'}{dt^2}\cos\alpha + \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\alpha$$
$$+ C.\frac{ds'}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\cos\alpha + \frac{dy'}{dt}\sin\alpha\right) - m\sin\alpha = 0,$$

puisque

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dx'^2+dy'^2} = ds'.$$

Multipliant la première équation par $\sin\alpha$, la deuxième par $\cos\alpha$, et soustrayant, on trouvera

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + C.\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dx'}{dt} = 0.$$

Multipliant ensuite la première équation par $\cos\alpha$, et la deuxième par $\sin\alpha$, et ajoutant, on trouvera

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + C.\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dy'}{dt} + m = 0.$$

Ces deux dernières équations, traitées par les méthodes connues (*voir* Poisson, *Mécanique*, deuxième édition, page 402), conduisent à

$$(2)\quad \begin{cases} C.dx' = \dfrac{dp'}{p'\sqrt{1+p'^2} + \log(p' + \sqrt{1+p'^2}) - \gamma'} \\ \text{et} \\ C.dy' = \dfrac{p'dp'}{p'\sqrt{1+p'^2} + \log(p' + \sqrt{1+p'^2}) - \gamma'}; \end{cases}$$

ici p' désigne le rapport $\frac{dy'}{dx'}$. Mais, pour exprimer les coordonnées primitives ou leurs différentielles dx, dy en fonction du rapport $\frac{dy}{dx} = p$, nous observerons que

$$dx' = dy \cos\alpha - dx \sin\alpha \quad \text{et} \quad dy' = dy \sin\alpha + dx' \cos\alpha,$$

et, par suite,

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{p \sin\alpha + \cos\alpha}{p \cos\alpha - \sin\alpha}.$$

Substituant, dans la formule (2), pour p', dx', dy' leurs valeurs, et appelant $F(p)\,dp$, $f(p)\,dp$ ce que deviennent les seconds membres, on aura visiblement

$$C.dy = \cos\alpha\, F(p)\,dp + \sin\alpha\, f(p)\,dp,$$
$$C.dx = \cos\alpha\, f(p)\,dp - \sin\alpha\, F(p)\,dp.$$

La trajectoire aura, dans ce cas, une asymptote parallèle à l'axe des y', et faisant, par conséquent, avec l'axe des x, un angle $\pi - \alpha$.

4. Nous terminerons ce travail par quelques observations utiles dans la pratique de la balistique. On peut voir dans les Traités de Mécanique rationnelle, dans celui de Poisson par exemple (tome Ier, page 403), que pour toutes les lois de la résistance de l'air, on obtient la relation générale

$$\frac{dp.dx}{dt} = -g.$$

Si donc, pour les équations du mouvement d'un projectile, nous

avons

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m\psi(s)\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + m\psi(s)\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} - g = 0.$$

la première, pouvant s'intégrer une fois, donnera une valeur de dt qui, substituée dans la relation générale ci-dessus, conduira à l'équation différentielle de la trajectoire.

L'intégrale de cette équation s'obtiendra généralement lorsque, pour le tir sous de petits angles, nous supposerons

$$ds = dx.$$

Admettons, enfin, que la loi de la résistance de l'air est exprimée par deux termes de la forme

$$m\cdot\frac{ds}{dt^2} + n\varphi(s)\cdot\frac{ds}{dt^2}.$$

remplaçant pour de petits angles s par x; les équations différentielles du mouvement seront, dans cette hypothèse,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{dx^2}{dt^2} + n\varphi(x)\cdot\frac{dx^2}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \left[m\frac{dx^2}{dt^2} + n\varphi(x)\cdot\frac{dx}{dt}\right]\frac{dy}{dx} - g = 0.$$

La première, divisée par $\frac{dx}{dt^2}$ et multipliée par dt, s'intègre une fois et donne un résultat de la forme

$$dt - mt.dx + ndx\int\varphi(x)\,dx = 0,$$

équation linéaire du premier ordre, qui donnera t, et, par suite, dt en fonction de x. Cette valeur, substituée dans la relation générale

$$\frac{d\rho.dx}{dt^2} + g,$$

conduira à une équation différentielle de la trajectoire, intégrable dans un grand nombre de cas, dans celui, par exemple, où $\varphi(x)$ sera une constante.

Construction des rayons de courbure des courbes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan;

PAR M. CHASLES.

Une courbe plane étant en mouvement dans son plan, déterminer les rayons de courbure de la courbe enveloppe de l'espace parcouru par cette courbe.

La courbe peut se réduire à un point; la question devient celle-ci : *Une figure plane étant en mouvement dans son plan, déterminer les rayons de courbure de la courbe décrite par un point de cette figure.*

La solution de cette question particulière sera comprise dans celle de la question générale, où il suffira de supposer que le rayon de courbure de la courbe mobile est nul. Ne nous occupons donc que de la question générale.

Le mouvement de la figure mobile est, comme on sait, une suite de rotations infiniment petites, autour de points fixes, qu'on a appelés *centres instantanés de rotation.* Ces points forment une courbe sur le plan fixe sur lequel glisse la figure. Et si l'on conçoit que chaque point de cette courbe, au moment où il est le centre de la rotation, imprime sa trace sur le plan mobile de la figure, ces traces successives formeront une seconde courbe mobile avec la figure. Il est aisé de voir que cette seconde courbe roule librement sur la première, car la rotation autour de leur point commun actuel a pour effet de faire coïncider le point suivant de la courbe mobile avec le point suivant de la courbe fixe. De là on conclut que :

Tout mouvement d'une figure plane dans son plan est toujours un mouvement de roulement d'une certaine courbe sur une autre courbe fixe.

Nous appellerons, suivant une dénomination ancienne, la courbe mobile *roulette*, et la courbe fixe la *base de la roulette*.

C'est la considération de ces deux courbes, la *roulette* et sa *base*, qui va nous servir pour résoudre le problème énoncé. Désignons la base par B, et la roulette par A. Celle-ci emporte, dans son mouvement, une courbe C; et c'est le rayon de courbure de la courbe enveloppe de l'espace parcouru par cette courbe C, que nous voulons construire à un instant quelconque du mouvement. Il est clair que pour cela nous pouvons substituer aux deux courbes A et B leurs cercles osculateurs, en leur point de contact à cet instant. De sorte que la question se réduit à celle-ci : *Un cercle* A *roulant librement sur un cercle fixe* B, *on demande de déterminer le rayon de courbure de la courbe enveloppe de l'espace parcouru par une courbe* C *mobile avec le cercle* A. Or cette question a été traitée par M. Savary dans ses Leçons sur les engrenages [*]. Soient R, R′ les rayons des deux cercles A et B; γ le centre de courbure de la courbe mobile C en son point de contact avec sa courbe enveloppe; γ' le centre de courbure de cette courbe enveloppe au même point de contact; m le point de contact des deux cercles. On sait par le théorème général du centre instantané de rotation, et même par le théorème particulier de Descartes [**], que la normale commune à la courbe C et à sa courbe enveloppe E, passe par ce point m. Soit φ l'angle que cette droite fait avec la normale commune aux deux cercles. La construction de M. Savary est exprimée par la relation suivante, entre les deux segments γm, $\gamma' m$ et les rayons des deux cercles,

$$\left(\frac{1}{\gamma m} \pm \frac{1}{\gamma' m}\right) \cos\varphi = \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \text{ [***]}.$$

Cette équation nous fera connaître $\gamma' m$, et, par conséquent, le centre de courbure de la courbe enveloppe E, si l'on connaît la *somme* ou *différence* $\left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right)$ des valeurs inverses des rayons de courbure des

[*] Il a été fait, d'après la rédaction même de M. Savary, une lithographie de cette partie du Cours de Machines, professé à l'École Polytechnique.

[**] Voir *Aperçu historique*, etc., page 548.

[***] On peut consulter aussi le *Traité de Géométrie descriptive* de M. Leroy; deuxième édition, 1842, page 384.

deux courbes A et B. Ces deux rayons de courbure ne nous sont pas connus, mais leur *somme* ou *différence* peut être déterminée par les conditions du mouvement de la figure.

Nous supposerons que le mouvement de la figure soit produit par le glissement de deux courbes mobiles sur deux courbes fixes; ce qui comprend beaucoup de cas, car chacune de ces courbes fixes ou mobiles peut se réduire soit à une ligne droite, soit à un point. Soient D l'une des courbes mobiles, et F la courbe fixe sur laquelle elle glisse. Soient ε, ε' les centres de courbure de ces deux courbes, ψ l'angle que leur normale commune en leur point de contact fait avec la normale commune aux deux courbes A et B; la courbe fixe F peut être considérée comme l'enveloppe de l'espace parcouru par la courbe D, de sorte qu'on a, d'après l'équation précédente,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon m} \pm \frac{1}{\varepsilon' m}\right) \cos\psi = \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}.$$

On a donc

$$\left(\frac{1}{\gamma m} \pm \frac{1}{\gamma' m}\right) \cos\varphi = \left(\frac{1}{\varepsilon m} \pm \frac{1}{\varepsilon' m}\right) \cos\psi.$$

Or, les segments εm, $\varepsilon' m$ et γm sont connus, puisque ce sont les distances des centres de courbure de trois courbes données, au *centre instantané de rotation;* cette équation fera donc connaître le segment $\gamma' m$ et conséquemment le centre de courbure de la courbe enveloppe E, pourvu toutefois que l'on connaisse la normale commune aux deux courbes A et B qui roulent l'une sur l'autre, puisque les angles φ et ψ se rapportent à cette normale.

Ainsi la question se trouve ramenée à celle-ci : *Construire les normales à la courbe lieu des centres instantanés de rotation, dans le mouvement d'une figure.*

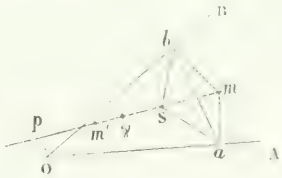
L'équation précédente nous donne elle-même la solution de cette question. En effet, nous avons supposé que le mouvement de la figure est produit par le glissement des deux courbes D, D′ sur deux courbes fixes F, F′. ε, ε' et ψ se rapportent aux deux courbes D et F; supposons que γ, γ' et φ se rapportent de même aux deux autres courbes D′, F′; et écrivons

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \left(\frac{1}{\varepsilon m} \pm \frac{1}{\varepsilon' m}\right) : \left(\frac{1}{\gamma m} \pm \frac{1}{\gamma' m}\right).$$

Le deuxième membre est connu, et le premier exprime le rapport des cosinus des angles que la normale à la courbe lieu des centres instantanés de rotation fait avec les normales aux deux courbes fixes, lesquelles normales sont précisément celles qui déterminent par leur intersection la position actuelle du centre instantané de rotation. Ainsi la normale cherchée se trouve déterminée, et le problème que nous nous sommes proposé est résolu complétement et d'une manière très-générale.

Nous avons considéré les deux courbes A, B, dont la première est mobile et roule sur la seconde, dans le mouvement de la figure, et nous avons déterminé leur normale commune; mais nous n'avons pas eu besoin de construire ces courbes. Du reste, cette construction est facile. La courbe fixe B est le lieu des centres instantanés de rotation. On détermine ces points, comme on sait, par l'intersection de deux normales. Pour construire la courbe A, on supposera que la figure mobile soit fixe, et que la figure fixe qui sert à diriger son mouvement devienne mobile, comme je l'ai dit dans mon *Aperçu historique* (Note XXXIV, page 410), et l'on construira la courbe lieu des centres instantanés de rotation dans ce second mouvement; ce sera la courbe A.

Si l'on applique la construction précédente des rayons de courbure au cas de l'ellipse décrite par le sommet S d'un triangle mobile Sab dont les deux autres points a, b glissent sur deux droites fixes OA, OB, on arrive à ce résultat : m étant le centre instantané de rotation, et con-



séquemment mS la normale à l'ellipse, si l'on prend Sm' = Sm, le centre de courbure γ sera le point conjugué harmonique du pied p de la perpendiculaire abaissée du point O sur la normale Sm', par rapport aux deux points m et m'.

On reconnaît aisément que le segment S*m* est toujours égal au demi-diamètre conjugué à celui qui passe par le point S. De sorte qu'on a ce théorème :

Si sur la normale en un point S *d'une ellipse on porte, de part et d'autre de ce point, deux segments égaux au demi-diamètre conjugué à celui qui aboutit à ce point, puis, qu'on prenne sur cette même normale le pied de la perpendiculaire qui lui est abaissée du centre de la courbe, le centre du cercle osculateur au point* S *sera le conjugué harmonique de ce point, par rapport aux extrémités des deux segments.*

Cette construction fournit immédiatement l'expression du rayon de courbure donnée par M. Charles Dupin dans ses *Développements de Géométrie.*

NOTE

SUR LES LOIS ÉLÉMENTAIRES DE L'ÉLECTRICITÉ STATIQUE;

PAR M. WILLIAM THOMSON.

Coulomb, en se servant d'expériences directes, a établi les lois élémentaires auxquelles est assujettie la distribution de l'électricité en équilibre sur les corps conducteurs. Comme il les a données indépendantes de toute hypothèse, il y a longtemps que les physiciens sont accoutumés à les admettre comme rigoureusement constatées. Le problème de la distribution de l'électricité sur les conducteurs de formes quelconques se trouve ainsi soumis à l'analyse mathématique. Cependant la solution, même dans les cas les plus simples, présentait tant de difficulté, que Coulomb, après avoir déterminé, par expérience, la distribution sur plusieurs corps, n'a pas pu comparer les résultats avec les conséquences rigoureuses de sa théorie. Néanmoins il s'est occupé de la recherche de quelques-uns des principes les plus importants qui s'y trouvent renfermés. Comme exemple, nous citerons le théorème général sur la répulsion exercée par une couche électrique en équilibre d'une forme quelconque, sur un point près de sa surface, qu'on trouve démontré dans son sixième Mémoire [*]. En effet, il prouve que la répulsion sur un point chargé de la même espèce d'électricité que le corps conducteur, et posé à une distance infiniment petite de la surface de ce corps, est égale au produit de 4π par la densité (rapportée à l'unité de surface) de la distribution électrique près de ce point.

Dans les Mémoires de Poisson sur l'électricité, nous trouvons la solution analytique du problème, correspondante aux cas les plus im-

(*) *Histoire de l'Académie*, année 1788, page 677.

portants des recherches expérimentales de Coulomb; l'accord des résultats est très-satisfaisant, et la rigueur, la beauté de l'analyse mettent la théorie de l'électricité à côté de celle de la gravitation, au premier rang des sciences physiques, sous le rapport mathématique. Au reste, les théorèmes donnés par Green dans son ouvrage intitulé : *Essai on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism* [*], peuvent être considérés comme complétant les éléments de cette théorie.

Dans ces derniers temps, il y a des physiciens distingués qui ont commencé à élever des doutes sur les lois constatées par Coulomb, et qui se sont livrés à la recherche expérimentale de la théorie de quelques phénomènes qu'ils ont cru être incompatibles avec ces lois. Les travaux les plus remarquables en ce genre ont été faits par les physiciens anglais Snow Harris et Faraday. Après avoir étudié avec soin leurs Mémoires, il m'a semblé que toutes celles de leurs expériences qui se rapportent à la distribution de l'électricité sur les corps conducteurs sont des déductions des lois de Coulomb, et par conséquent qu'elles sont des vérifications de sa théorie, au lieu d'y être opposées. Comme plusieurs physiciens se sont attachés aux opinions ou de Snow Harris ou de Faraday, et comme beaucoup d'autres peuvent être amenés à se méfier de la théorie de Coulomb, l'essai qu'on va faire d'expliquer les difficultés apparentes peut présenter quelque intérêt.

I.

1. Le premier Mémoire qu'il faut considérer est celui de M. Harris, publié en 1834 et intitulé : *An inquiry in to the elementary laws of electricity*. Dans ce Mémoire, après avoir décrit les recherches dont il croit les résultats incompatibles avec la théorie généralement reçue (comme, en effet, ils le seraient s'ils étaient rigoureux et non pas seulement approximatifs et limités d'ailleurs à des cas particuliers), l'auteur s'applique à poser les principes fondamentaux d'une théorie nouvelle.

---

[*] Nottingham, 1828. Cambridge, Deighton.

2. L'action électrique que M. Harris considère en premier lieu est l'attraction exercée par un corps isolé et électrisé sur un corps conducteur non isolé. Le premier résultat qu'on trouve énoncé est que l'attraction varie suivant le carré de la quantité d'électricité que possède le corps isolé, quand les autres circonstances demeurent les mêmes. Or il n'y a là qu'une conséquence immédiate de la théorie ordinaire, comme, en effet, M. Whewell l'a démontré dans un Rapport sur les diverses parties de la physique mathématique [*].

3. Le second énoncé est que la force de l'attraction varie en raison inverse du carré de la distance entre les deux corps, la quantité d'électricité sur le premier corps restant constante. Nous en rapprocherons une autre expérience que M. Harris rapporte plus loin, et d'après laquelle la quantité d'électricité qu'il faut donner au corps isolé pour qu'il y ait une étincelle varie suivant la raison simple de la distance entre les deux corps, ce qui du reste se trouve vérifié par des recherches de Riess. Au surplus, il faut dire que, dans toutes ces expériences, le corps électrisé communique avec la garniture intérieure d'une bouteille de Leyde, ou d'une batterie, au moyen d'un fil de métal. Ainsi, la condition mathématique que la théorie fournit relativement à la charge, pour toute position des deux corps, est que, dans l'intérieur du premier corps, la valeur du potentiel (suivant l'expression connue de Green et de Gauss, qui désignent de cette manière la somme des éléments d'une masse divisés par leurs distances à un point) soit constante et égale à celle qui correspond à la garniture intérieure de la batterie, dont l'état n'éprouve pas de changement par l'action d'influence du corps non isolé. Or on voit aisément que cette condition ne peut pas fournir des énoncés simples et absolus comme ceux de M. Harris. Il faut donc chercher s'il n'y aurait pas quelques restrictions imposées par la nature même des circonstances dans lesquelles les observations ont été faites. En effet, dans les expériences sur les longueurs des étincelles dont nous allons considérer, en premier lieu, les résultats, on remarque que la distance entre les deux corps ne peut

[*] *British Association* Report for 1836.

jamais être grande, et même, qu'en général, elle est une fraction assez petite des diamètres des sphères dont on se sert pour les corps agissant dans ces expériences. Or, quand cette distance est infiniment petite, on démontre facilement que les intensités des électricités contraires aux points les plus voisins de deux corps sont égales, et que chacune a pour expression le potentiel dans la garniture intérieure de la batterie, divisé par le produit de 4π et de la distance des corps. On peut regarder cette expression comme assez approchée pour tous les cas d'observation, attendu que les observations, par leur nature, ne peuvent jamais être d'une grande précision. En admettant donc cette expression, l'intensité maxima sur chaque corps sera en raison inverse de la distance des corps et en raison directe de la charge de la batterie. Mais dans le même état de l'atmosphère, et avec les mêmes corps agissants (il est probable que cette dernière restriction n'est pas nécessaire), il y a toujours étincelle pour une intensité déterminée sur les points opposés; d'où il suit que la longueur de l'étincelle sera en raison directe de la charge de la batterie, ce qui est la loi qu'il s'agit de vérifier.

L'énoncé relatif à la force d'attraction entre les deux corps paraît être encore plus borné dans ses applications. En effet, dans la plupart des expériences, les parties opposées des surfaces des corps sont planes, et toujours M. Harris trouve que l'attraction, dans la limite des erreurs de ses expériences, est indépendante de la forme des parties non opposées. A ce degré d'approximation, le calcul de l'attraction est très-facile. En effet, soient v le potentiel dans la garniture intérieure de la batterie, A l'aire des surfaces opposées que nous supposons planes, et a la distance entre ces surfaces, quantité peu considérable par rapport aux dimensions linéaires de A. L'intensité de l'électricité en tout point de chaque surface opposée sera

$$\frac{v}{4\pi a}.$$

et, par conséquent, l'attraction exercée par une surface sur un point quelconque de l'autre sera

$$\frac{v}{2a}.$$

ce qui donne, pour l'attraction totale entre les deux surfaces,

$$\frac{v^2 A}{8\pi a^2}.$$

Soient Q la quantité d'électricité de la charge, e l'épaisseur effective moyenne du verre de la batterie, S la surface de chaque garniture. On aura

$$v = \frac{4\pi Q e}{S},$$

et l'expression précédente devient

$$\frac{2\pi Q^2 e^2}{S^2} \cdot \frac{A}{a^2}.$$

Le facteur a^{-2} de cette expression donne la loi d'attraction dont il s'agit. Le facteur Q^2 donne la loi que nous avons indiquée plus haut comme rigoureuse, et enfin, le facteur A donne une autre loi approximative, constatée par M. Harris. Si les surfaces planes ne sont pas opposées dans toutes leurs parties, celles qui se dépassent n'apporteront pas de différence très-sensible dans l'attraction; il faut donc ne prendre pour A que la partie de la surface d'un des corps qui se trouve tout à fait en face de celle de l'autre. Ainsi, s'il y a une des surfaces opposées qui soit plus grande que l'autre, l'attraction sera la même que si chaque surface était égale à la plus petite, résultat aussi énoncé par M. Harris.

4. La partie la plus importante des recherches de M. Harris est celle dans laquelle il s'occupe de déterminer le pouvoir isolant de l'air à des densités différentes. Mais il faut remarquer que ce sujet n'appartient pas à la théorie de la distribution de l'électricité sur les corps conducteurs. Le résultat auquel l'auteur arrive est que l'intensité maxima varie seulement avec la densité de l'air, et pas du tout avec la pression, ou la température. Ainsi il parvient à démontrer d'une manière satisfaisante que les faits déjà observés relativement au pouvoir conducteur des corps fortement échauffés, des flammes, et enfin du vide, sont produits par la raréfaction de l'air dans chaque cas. De plus, il énonce comme loi que l'intensité maxima (ou celle qui est né-

cessaire pour produire une étincelle) est proportionnelle à la densité de l'air.

5. Dans un Mémoire publié deux ans après [*], on trouve des expériences nouvelles pour constater les principes élémentaires de la théorie de l'électricité. La première série a pour objet la loi de répulsion des électricités contraires. Dans les recherches de ce genre, il y a beaucoup de précautions à prendre quand on veut arriver à des résultats quantitatifs rigoureux. Par exemple, il faut que tout corps conducteur soit éloigné des deux dont on observe la répulsion, afin qu'il n'y ait pas d'influence perturbatrice sur cette force. De plus, l'objet des expériences étant de trouver la loi de répulsion de deux *points* possédant la même espèce d'électricité, les deux corps doivent être tels qu'on puisse, sans erreur sensible, supposer leurs charges concentrées chacune dans un point; il faut donc que la distance entre les deux corps soit très-grande par rapport à leurs dimensions linéaires, et cela est nécessaire même dans le cas où les deux corps sont sphériques, afin d'éviter le changement de distribution de l'électricité sur chaque corps produit par l'influence mutuelle. Toutes ces précautions ont été observées avec soin par Coulomb, qui les a signalées dans ses Mémoires, et c'est ainsi qu'il parvint à constater la loi de l'inverse du carré des distances, loi rigoureuse que d'ailleurs on déduit d'un autre genre d'expériences tout à fait différent [**]. Nous trouvons, au contraire, que, dans les recherches de M. Harris, ces conditions n'ont pas été satisfaites, et c'est ce qui empêche de déduire des lois exactes de ses mesures. Cependant, ses résultats peuvent servir comme démonstrations qualitatives de la théorie mathématique, et nous en rapporterons quelques-uns des plus remarquables.

6. Quand la distance entre les deux corps est très-grande par rapport à leurs dimensions linéaires, M. Harris trouve que la loi de Coulomb est tout à fait vérifiée; c'est-à-dire il trouve que la répulsion

---

[*] *Philosophical Transactions*, 1836.

[**] On sait, en effet, et il est facile de démontrer, que cette loi résulte de ce que, dans l'intérieur des corps conducteurs en équilibre, on n'observe aucun phénomène électrique.

varie suivant le carré inverse de la distance, et suivant le produit des charges directement.

Au contraire, quand la distance est petite, il n'y a pas de loi simple pour la répulsion, mais elle est toujours moindre qu'elle ne le serait suivant la loi du carré inverse de la distance, et toujours positive si les corps (qui sont égaux et semblables) possèdent des charges égales. De plus, quand il y a une différence assez considérable entre les charges, on observe que la répulsion se trouve remplacée par une force d'attraction pour toute distance au-dessous d'une certaine limite.

Tous ces résultats sont en plein accord avec la théorie de Coulomb, attendu que les irrégularités observées à des distances petites sont les conséquences nécessaires qui s'en déduisent, à cause de l'influence mutuelle des deux corps. Quant au changement de sens de la force entre les deux corps, on conclut de la théorie qu'il y a toujours attraction au-dessous d'une certaine distance déterminée suivant la différence des charges. S'il y a très-peu de différence, l'attraction n'aura pas lieu avant qu'il y ait une très-grande intensité d'électricité sur les points les plus voisins des deux corps, et il y aura une étincelle quand il y a encore répulsion. C'est pourquoi on ne peut pas constater le changement de sens de la force, tant qu'il n'y a pas une différence assez considérable entre les charges. M. Harris trouve, en général, qu'il est facile de constater l'attraction quand une charge est double de l'autre, avec les corps dont il s'est servi, qui sont en apparence des sphéroïdes de révolution très-aplatis.

7. M. Harris étudie ensuite la théorie du plan d'épreuve. Il se propose cette question : Peut-on considérer les expériences faites avec le plan d'épreuve comme indiquant avec certitude l'intensité de l'électricité en un point quelconque d'un corps électrisé? Il répond négativement en s'appuyant principalement sur une expérience dans laquelle le corps chargé est non conducteur (une sphère creuse en verre). Mais il faut se rappeler qu'on n'a jamais employé le plan d'épreuve pour mesurer l'intensité d'électricité en divers points d'une surface non conductrice, et que la conclusion de M. Harris n'est nullement opposée aux idées reçues. Au reste, comme on ne peut élever aucun doute, ni sur l'emploi expérimental que Coulomb a fait du plan d'épreuve, ni

sur la théorie telle qu'elle est expliquée dans l'ouvrage de M. Pouillet, il n'est pas nécessaire de s'en occuper ici. On trouve la théorie rigoureuse de cet instrument dans le sixième Mémoire de Coulomb, à l'exception d'une seule méprise dont il est facile de se rendre compte, et qui le conduit à attribuer une quantité double de la vraie valeur à l'électricité enlevée par le plan d'épreuve, après le contact.

II.

8. Les recherches de M. Faraday sur l'*induction électrostatique*, qu'on trouve dans un Mémoire [*] qui fait la série onzième de son ouvrage intitulé : *Experimental Researches in electricity*, ont été faites dans le but de vérifier une idée qu'il avait longtemps entretenue, de la propagation de la force électrique à travers les corps isolants, par le moyen d'une action moléculaire entre les éléments contigus de ces corps. Guidé par cette idée, il a été conduit à une manière très-remarquable d'envisager les phénomènes d'induction, ou, en général, l'action de l'électricité statique. On peut voir, en les étudiant, que les idées de M. Faraday ne sont en aucune manière opposées aux lois de Coulomb; mais, de plus, il est probable qu'on peut en déduire les éléments d'une théorie également générale et fondamentale comme celle de Coulomb, et enfin que chaque théorie renferme l'autre. Dans cette Note, nous nous bornerons à exposer l'interprétation qu'on peut donner des idées de M. Faraday; mais auparavant nous allons montrer comment la théorie actuelle de l'électricité peut être envisagée d'une manière élémentaire sous deux points de vue distincts.

En s'appuyant sur les lois de Coulomb et sur l'analyse de Laplace et de Poisson, on parvient à prouver que tout problème relatif à la distribution de l'électricité sur des corps conducteurs est identique avec un autre problème relatif au mouvement uniforme de la chaleur. En effet, considérons un corps conducteur électrisé A, renfermé dans une enveloppe conductrice dont la surface intérieure B peut avoir une forme quelconque, mais qui ne se trouve nulle part en contact avec A.

---

[*] *Philosophical Transactions*, 1838.

Si nous voulons considérer le cas de la distribution de l'électricité sur A, indépendamment de toute influence extérieure, il faudra supposer B infiniment grande et partout à une distance infinie de A. La distribution de l'électricité de la charge sur A, et de l'électricité contraire attirée par l'influence (ou par l'*induction*, suivant l'expression de M. Faraday) à la surface B, s'opérera de telle façon que la force résultante sur tout point en dedans de A, ou en dehors de B, sera zéro. Le problème correspondant dans la théorie de la chaleur [*] est le suivant. Les surfaces A et B sont entretenues à des températures différentes; chacune ayant une valeur constante, il s'agit de déterminer la quantité de chaleur qui s'écoule à travers un élément quelconque de A ou de B quand le mouvement est devenu uniforme. En effet, l'intensité de la distribution électrique en un point quelconque de A ou de B, dans le premier problème, se trouve remplacée par le flux de chaleur dans le second, et de plus la force résultante sur un point quelconque entre A et B est remplacée par le flux résultant de chaleur au même point. Chaque problème est déterminé, et de là il suit que les solutions sont nécessairement identiques, bien que les lois élémentaires dont on se sert ordinairement dans les deux cas soient tout à fait distinctes. Ainsi, on peut envisager un des problèmes de façon à s'appuyer sur les lois élémentaires de l'autre, en le discutant. Il est un peu difficile de voir comment on peut faire servir les lois relatives à la théorie de la chaleur pour point de départ d'une théorie de l'électricité, mais c'est de cette façon que M. Faraday envisage les phénomènes d'induction. Il est ainsi parvenu à la connaissance (nous ne pouvons pas dire à la démonstration rigoureuse) de quelques-uns des plus remarquables théorèmes de l'électricité. Par exemple nous citons le suivant, qui paraît être l'idée fondamentale de M. Faraday sur l'induction. Soient α une partie quelconque de la surface A, et β sa projection sur B, déterminée par les courbes douées de la propriété que la force résultante des distributions sur A et B est en chaque point dirigée suivant la tangente, courbes que M. Faraday désigne par *lignes d'induction*. La quantité d'électricité sur β est égale à celle sur α, mais

[*] *Cambridge Mathematical Journal*, vol. III, page 75.

d'espèce contraire. S'il y a plusieurs corps comme A renfermés dans l'enveloppe, quelques-uns des éléments de A se trouveront projetés sur leurs surfaces, et non sur la surface B, à moins que le potentiel, dans l'intérieur de A et de tous les autres corps renfermés, ait une valeur unique; mais le même théorème relatif aux quantités d'électricité sur les éléments et sur leurs projections est encore vrai.

Dans la première partie de son Mémoire, M. Faraday s'occupe de la démonstration expérimentale de la théorie de l'*induction en lignes courbes*. Les résultats auxquels il parvient sont presque suffisants pour en conclure une théorie rigoureuse, et, en effet, identique au fond avec celle de Coulomb; mais il faut avouer qu'ils sont plutôt devinés que rigoureusement constatés par des expériences quantitatives. Comme exemple, nous empruntons un passage remarquable de son Mémoire :

« 1173. Je fis construire une chambre cubique de 12 pieds de » côté. Une légère monture cubique en bois, entrelacée avec des fils » en cuivre, était ajustée de façon à faire une enveloppe sur les parois » de la chambre. Au moyen de bandes de feuilles d'étain, liées avec » du papier, on établissait partout une bonne surface conductrice. » Cette chambre était isolée dans l'amphithéâtre de la *Royal Institution*, et un tube en verre, de plus de 6 pieds de long, était enfoncé » dans le cube à une distance de 4 pieds. Dans l'intérieur de ce tube, » il y avait un fil métallique en communication avec le conducteur » de la grande machine électrique, déjà décrite. En faisant marcher » la machine, on pouvait amener l'air de la chambre cubique à l'état » qu'on appelle ordinairement fortement électrisé, ce qui est semblable, en effet, à l'état d'une chambre ordinaire où il y a une grande » machine électrique en opération. En même temps, la paroi extérieure du tube isolé se trouvait partout fortement chargée. Si, après » avoir mis en communication le cube avec l'appareil conducteur décrit dans une série précédente et destiné à détruire complétement » l'isolement, j'interrompais subitement la communication avec la » machine, et si, un instant après, j'isolais le cube, l'air en dedans ne » possédait pas la moindre puissance pour l'électriser. S'il y avait eu » de l'air électrisé comme du verre et d'autre corps isolants le peuvent

» être, il y aurait eu une action contraire correspondante, sur la » surface intérieure du tube, le phénomene n'étant qu'un cas d'induc- » tion. Toutes mes tentatives pour charger (*bodily*) l'air intérieur d'une » quantité, même la plus petite, d'électricité, soit positive, soit né- » gative, ont complétement échoué.

» 1174. Je mettais un électromètre sensible à feuilles d'or dans » l'intérieur du cube, et ensuite je communiquais à la surface exté- » rieure une forte charge; mais l'électrometre n'a pas indiqué d'élec- » tricité, ni pendant l'opération de la charge, ni après l'avoir ôtée. » J'ai chargé et déchargé l'appareil de diverses manieres, mais je n'ai » jamais trouvé une charge actuelle dans son intérieur, ni même au- » cune action d'induction. Je suis entré dans le cube, et j'y suis resté » quelque temps; je faisais usage de bougies allumées, d'électro- » mètres, et de tous les instruments qui pouvaient indiquer l'état » électrique, mais je n'ai pu trouver la moindre action, bien qu'en » même temps la surface extérieure du cube fût fortement électri- » sée, et que de longues étincelles et des aigrettes s'élançassent par- » tout. »

La premiere partie de cette expérience donne une belle démonstration expérimentale du théoreme de Green, que s'il y a des corps électrisés dans l'intérieur d'une enveloppe conductrice, les points extérieurs n'en sentent pas du tout l'influence, et la seconde partie est une vérification de la loi qu'il n'y a ni force, ni électricité libre dans l'intérieur d'un corps conducteur électrisé.

L'hypothèse dont M. Faraday s'est servi pour représenter l'action de l'électricité l'a conduit à chercher si les effets d'induction sont indépendants de l'espèce du milieu isolant, et, dans la seconde partie de son Mémoire, il donne un exposé des expériences qu'il a faites pour cet objet, et les résultats auxquels il est parvenu.

Il trouve, en premier lieu, que ce qu'il appelle les pouvoirs diélectriques des divers corps isolants solides qu'il a essayés sont différents, et il donne des nombres pour représenter ces pouvoirs déduits de ses expériences. Il trouve ensuite que les différents gaz employés comme corps isolants ne présentent aucune différence, et avec l'air atmosphérique il constate que l'action conductrice est sensiblement la meme

pour toutes les densités, jusqu'à la limite nécessaire pour retenir la charge, résultat qui est vérifié par des expériences faites auparavant par M. Harris.

Pour traduire ces résultats dans la langue de la théorie mathématique, supposons, comme auparavant, qu'il y a un corps conducteur électrisé A, isolé dans l'intérieur d'une enveloppe conductrice dont nous désignons la surface intérieure par B, et supposons que l'espace entre A et B est rempli d'un milieu isolant. Si la surface extérieure de l'enveloppe est dépourvue d'électricité, le potentiel dans la matière de l'enveloppe, et à sa surface intérieure B, sera nul. Le potentiel à la surface A, et dans l'espace intérieur, aura une valeur constante qui sera positive ou négative, suivant que l'électricité de la charge de A est positive ou négative. Maintenant, il résulte des expériences de M. Faraday, que cette valeur du potentiel, qui correspond à une quantité donnée de l'électricité sur A, est tout à fait indépendante du milieu isolant, si ce corps est un gaz; mais si c'est un corps solide non conducteur, la valeur du potentiel est différente pour les différents corps, et toujours plus petite qu'elle ne le serait avec la même charge, si le milieu isolant était un gaz. Il paraît que M. Faraday a bien constaté que ce résultat remarquable ne peut pas être attribué à un pouvoir conducteur partiel du corps isolant, et, d'ailleurs, il est en accord avec ce que Nicholson avait déjà observé, que le *pouvoir dissimulant* d'une bouteille de Leyde dépend non-seulement de l'épaisseur, mais aussi de l'espèce du verre. Il faut donc qu'il y ait une action tout à fait spéciale dans l'intérieur des corps *diélectriques* solides, pour produire cet effet. Il est probable que le phénomène se trouverait expliqué en attribuant au corps une action semblable à celle qui aurait lieu s'il n'y avait pas d'action diélectrique dans le milieu isolant et s'il y avait un très-grand nombre de petites sphères conductrices réparties uniformément dans ce corps. Poisson a montré que l'action électrique, dans ce cas, serait tout à fait semblable à l'action magnétique du fer doux sous l'influence des corps magnétisés. En s'appuyant sur les théorèmes qu'il a donnés relativement à cette action, on parvient facilement à démontrer que si l'espace entre A et B est rempli d'un milieu ainsi constitué, les surfaces d'équilibre seront les mêmes que quand il n'y a qu'un milieu isolant sans pouvoir diélectrique, mais que le potentiel dans l'in-

térieur de A sera plus petit que dans le dernier cas, dans un rapport qu'il est facile de déterminer d'après les données relatives à l'état du milieu isolant. Cette conclusion paraît être suffisante pour expliquer les faits que M. Faraday a observés relativement aux milieux diélectriques; mais on ne pourra considérer l'hypothèse dont elle est déduite comme constatée, qu'après beaucoup d'autres recherches expérimentales. La vérification la plus décisive serait de chercher l'action qui a lieu quand il n'y a qu'une couche plus ou moins épaisse du milieu diélectrique sur chaque surface A ou B, ou sur une seule, la partie restante de l'espace intermédiaire étant remplie d'air.

M. Faraday a envisagé la question tout à fait autrement. En effet, il attribue la propagation de la force électrique à une action moléculaire entre les molécules contiguës des milieux isolants, et il suppose qu'il n'y a pas d'action directe de l'électricité à des distances sensibles. Ainsi, suivant lui, le pouvoir diélectrique de l'air et de tous les gaz est le même et constant pour toute pression, température ou densité; mais les pouvoirs des corps solides isolants, sur lesquels il a fait des expériences, sont plus grands que pour les gaz et différents l'un de l'autre. Il est possible qu'on parvienne ainsi à expliquer ou à pousser plus loin la théorie de l'électricité, et même celle de la gravitation, mais jusqu'ici nous ne savons rien d'une telle action moléculaire, et il paraît plus simple, dans l'état actuel de la physique, de s'en tenir à la loi de l'attraction ou répulsion électrique, ou de gravitation.

Pour montrer comment M. Faraday envisage la théorie qu'il propose, comparée à celle de Coulomb, nous citerons, pour terminer, un passage qu'on trouve à la fin de son Mémoire :

« Comme vérification de la justesse probable de mes opinions, je les » ai toujours, pendant cet examen expérimental, comparées avec les » conclusions déduites par Poisson de ses beaux travaux mathématiques. Autant que je puis en juger, la théorie que j'ai exposée et les » résultats auxquels je suis parvenu ne sont pas contraires à celles de » ces conclusions qui se rapportent à l'état final des forces électriques, » dans le nombre borné des cas qu'il a considérés. Sa théorie s'appuie » sur une manière d'envisager l'induction très-différente de celle que » j'ai entrepris de soutenir, et il est probable qu'elle trouvera sa vérification mathématique quand on essayera de l'appliquer au cas d'induction en lignes courbes. »

Sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique;

PAR J. LIOUVILLE

Dans la séance du 12 mai dernier, j'ai communiqué verbalement à l'Académie les résultats de quelques recherches relatives à diverses questions d'analyse et de physique mathématique. Voici le résumé de cette communication, tel qu'on le trouve dans les *Comptes rendus* (tome XX, page 1386) :

« La première question dont je désire entretenir l'Académie est relative à l'équilibre de la chaleur dans un ellipsoïde homogène. On donne les températures à la surface; ces températures, fixes pour chaque point, varient d'un point à l'autre suivant une loi quelconque, et il faut en déduire les valeurs des températures permanentes pour les points intérieurs. On sait que, pour résoudre ce problème, M. Lamé a fait usage de coordonnées ou variables particulières, et a introduit en analyse certaines fonctions très-remarquables, dont chacune ne dépend que d'une seule des variables [*]. J'ai eu depuis, dans d'autres circonstances, occasion de me servir de ces mêmes fonctions dont j'ai reconnu toute l'utilité. Quelques propriétés importantes que je leur ai trouvées permettent, en effet, de traiter avec succès diverses questions qu'auparavant on aurait pu regarder comme presque inabordables. M. Lamé, par son travail, a ainsi préparé, pour les géomètres, de puissantes ressources dont ils doivent être reconnaissants. Mais il est curieux de remarquer que, loin d'avoir simplifié la solution de la question spéciale à laquelle était consacré ce travail (même origine d'une féconde théorie), la marche savante suivie par l'auteur l'a, au contraire, compliquée beaucoup.

[*] Voyez le tome IV de ce Journal, page 126.

» Pour arriver, en effet, sans aucun artifice ni principe nouveau, à la solution demandée, observons qu'à chaque point de l'ellipsoïde on peut faire correspondre un point d'une surface sphérique de rayon égal à l'unité, les coordonnées rectangles du second point étant égales à celles du premier, respectivement divisées chacune par le demi-axe de l'ellipsoïde qui lui est parallèle. Ainsi la fonction donnée qui représente la loi des températures à la surface de l'ellipsoïde peut être regardée comme une fonction des deux angles qui déterminent la position d'un point sur la surface de la sphère. Par suite, elle peut être développée en une série $Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n + \ldots$ ou ΣY_n du genre de celles de Laplace. Le terme général Y_n de cette série si connue peut, d'ailleurs, s'exprimer par une fonction entière, du degré n, des coordonnées rectangulaires x, y, z, relatives à la surface de l'ellipsoïde. Enfin, il est aisé de voir qu'on peut trouver un polynôme V_n, aussi de degré n, qui satisfasse à la fois à l'équation indéfinie

$$\frac{d^2 V_n}{dx^2} + \frac{d^2 V_n}{dy^2} + \frac{d^2 V_n}{dz^2} = 0$$

pour tout point de l'espace, et à la condition $V_n = Y_n$ à la surface. La formule générale des températures sera dès lors $u = \Sigma V_n$.

» Non-seulement cette solution est bien plus simple que celle de M. Lamé, mais, en outre, on peut aisément démontrer la convergence des séries employées, ce que M. Lamé n'a pas même essayé de faire, sans doute à cause de la complication de sa formule finale, qui pourtant au fond doit revenir et revient en effet à la nôtre. Voici à ce sujet une méthode générale, qui repose, en quelque sorte, sur une idée physique. Dans l'intérieur de notre ellipsoïde, la température permanente d'un point quelconque ne peut être évidemment ni un *maximum* ni un *minimum*; dans le premier cas elle diminuerait, et dans le second elle augmenterait par l'action des points environnants. Le *maximum* et le *minimum* ne peuvent être qu'à la surface, en sorte que les températures extrêmes qui y ont lieu servent de limites aux températures des points intérieurs. Or, soit pour un moment $Y_n + Y_{n+1} + \ldots + Y_{n+m}$ la loi des températures à la surface; la loi dans l'intérieur sera alors $V_n + V_{n+1} + \ldots + V_{n+m}$, et les valeurs de cette dernière quantité seront, d'après ce qu'on vient de dire, toutes comprises entre le *maximum* et

le *minimum* de la première. Mais pour $n = \infty$, celle-ci est toujours infiniment petite, puisque la série ΣY_n est convergente; donc il en est de même de l'autre, et, par conséquent, la série ΣV_n est aussi convergente.

» Ce mode de démonstration, qu'il est aisé de présenter d'une manière purement analytique, est applicable à des corps de forme quelconque homogènes ou non; on peut même le généraliser et s'en servir pour prouver la convergence d'une foule d'expressions relatives à des intégrales d'équations linéaires ou même non linéaires très-différentes de celle qu'on vient de considérer.

» Ajoutons ici quelques mots pour éclaircir ce qui concerne les séries de M. Lamé. En regardant comme ne formant qu'un seul terme l'ensemble des termes de ces séries qui répondent dans le Mémoire de l'auteur à une même valeur de la lettre n, mais à différentes valeurs de B, et en faisant encore usage d'une sphère auxiliaire, on reconnaît d'abord qu'à la surface de l'ellipsoïde le développement employé par M. Lamé ne diffère pas au fond du développement ΣY_n de Laplace. Ainsi à la surface, la convergence a lieu pour la nouvelle série comme pour l'ancienne. Dans l'intérieur, elle a donc aussi lieu *à fortiori*, d'après le théorème général établi plus haut.

» Le caractère propre de l'analyse de M. Lamé consiste dans la décomposition en une somme de produits EE_1E_2 (où chaque facteur ne dépend que d'une seule variable) de l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

Mais les premières applications que j'en ai faites m'ont bien vite appris qu'il est indispensable de joindre aux fonctions E, E_1, E_2, une quatrième fonction qui satisfait à la même équation différentielle que E, mais qui est moins simple, puisqu'elle dépend d'intégrales elliptiques, tandis que E s'exprime algébriquement. Cette quatrième fonction se présente dans la question même que M. Lamé a traitée, dès qu'au lieu de rechercher la loi des températures permanentes dans l'intérieur de l'ellipsoïde, on recherche cette loi à l'extérieur, en regardant l'espace entier comme rempli d'une matière homogène. La fonction E ne peut plus être employée alors, et on doit la remplacer par celle que

nous indiquons. C'est, du reste, sur l'emploi de cette fonction nouvelle que reposent les plus importants des théorèmes auxquels je suis parvenu, et en particulier ceux qui, se rapportant au développement du radical par lequel on exprime l'inverse de la distance de deux points, conduisent à une théorie des sphéroïdes elliptiques ou presque elliptiques analogue à celle des sphéroïdes presque sphériques de la *Mécanique céleste*.

» Par exemple, on résout sans peine, pour un ellipsoïde quelconque, le problème de M. Gauss, relatif à la distribution, sur la surface, d'une matière attractive ou répulsive, avec la condition qu'en chaque point de cette surface le *potentiel* ait une valeur donnée. »

Relativement au problème de M. Gauss, on trouvera quelques développements dans la Note suivante que j'ai présentée à l'Académie dans la séance du 2 juin [*] :

« Dans la communication que j'ai eu l'honneur de faire dernièrement à l'Académie, j'ai dit qu'à l'aide de certaines formules auxquelles je suis arrivé, on résout sans peine pour un ellipsoïde quelconque le problème de M. Gauss relatif à la distribution, sur la surface, d'une matière attractive ou répulsive, avec la condition que le *potentiel* ait en chaque point de la surface une valeur donnée. On m'a engagé depuis à entrer sur ce sujet dans quelques détails; je vais donc transcrire ici ma formule que j'emprunte, du reste, à une Note présentée il y a déjà longtemps au Bureau des Longitudes.

» Soient $d\omega$ un élément de la surface de l'ellipsoïde, et λ la densité de la distribution en ce point; désignons par Δ la distance de l'élément $d\omega$ à un autre élément quelconque $d\omega'$, pour lequel λ se change en λ'. D'après le sens que M. Gauss (après l'habile géomètre anglais G. Green) attache au mot *potentiel*, l'intégrale double

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta}$$

---

[*] *Comptes rendus*, tome XX, page 1609.

exprimera la valeur du potentiel pour un point de $d\omega$. Il s'agit donc de déterminer λ de telle sorte qu'on ait

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = Q,$$

Q étant une fonction donnée à volonté pour chaque élément $d\omega$.

» Bien qu'on puisse se passer, si l'on veut, des *coordonnées elliptiques* de M. Lamé, nous nous en servirons pour donner une forme plus nette et plus précise à la solution. Cela nous permettra d'ailleurs d'abréger cet article en adoptant tout d'abord les notations dont notre confrère a fait usage dans son Mémoire : *Sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux* [*]. Mais aux fonctions E, E_1, E_2, que M. Lamé considère, et qui dépendent respectivement des trois variables ρ, ρ_1, ρ_2, nous ajouterons une quatrième fonction S, qui dépendra, comme E, de ρ seulement, et satisfera à la même équation différentielle que E; en voici l'expression :

$$S = (2n+1)E\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{E^2\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}.$$

De plus, nous représenterons par l le quotient obtenu en divisant par le produit $\rho\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}$ des trois demi-axes de l'ellipsoïde qui nous occupe, la perpendiculaire abaissée du centre de cet ellipsoïde sur le plan tangent correspondant à l'élément $d\omega$. Cela posé, je trouve

$$\lambda = \frac{l}{4\pi}\sum \frac{(2n+1)E_1E_2\int\int lQE_1E_2\,d\omega}{ES\int\int lE_1^2E_2^2\,d\omega},$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les couples E, E_1, E_2, S, c'est-à-dire aux valeurs successives 0, 1, 2, 3,..., de n, ainsi qu'aux valeurs de B qui répondent à chaque entier n. On peut mettre cette valeur de λ sous une autre forme en faisant intervenir le développement de Q suivant les

[*] Tome IV de ce Journal, page 126. Ajoutons toutefois que ces notations ne paraissent pas devoir être conservées; ainsi, au lieu de ρ, ρ_1, ρ_2, E, E_1, E_2, je proposerais d'écrire respectivement ρ, μ, ν, R, M, N, réservant les indices pour distinguer entre elles les diverses fonctions R, ou les diverses fonctions M ou N.

produits $E_1 E_2$. Soit

$$Q = \sum A E_1 E_2 :$$

on aura

$$\lambda = \frac{l}{4\pi} \sum \frac{(2n+1) A E_1 E_2}{ES}.$$

Telle est la fonction λ pour laquelle

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = Q.$$

» Si l'on prend en particulier $Q = E_1 E_2$, et qu'on marque d'un accent les quantités qui se rapportent à l'élément $d\omega'$, il vient simplement

$$\int\int \frac{l' E'_1 E'_2 d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi E S E_1 E_2}{2n+1}.$$

formule élégante et très-digne de l'attention des géomètres. Dans cette formule, Δ désigne la distance d'un point de l'élément $d\omega'$ à un autre point situé sur le même ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

Mais, s'il s'agissait de deux points (ρ', ρ'_1, ρ_2), (ρ, ρ_1, ρ_2), dont le premier appartiendrait encore à $d\omega'$, mais qui seraient (à cause de ρ différent de ρ') situés sur deux ellipsoïdes homofocaux différents, on aurait

$$\int\int \frac{l' E'_1 E'_2 d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi E' S E_1 E_2}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho',$$

et

$$\int\int \frac{l' E'_1 E_2 d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi E S' E_1 E}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'$$

» Les démonstrations de ces divers résultats sont on ne peut plus simples. Ajoutons que le produit $E_1 E_2$ (ou si l'on veut $l E_1 E_2$) jouit de propriétés fort curieuses dont plusieurs se rapportent à des *maxima* et *minima*. Au reste, ces propriétés ne sont pas bornées à l'ellipsoïde, et encore moins tiennent-elles aux coordonnées que nous venons d'employer; elles s'étendent à des surfaces quelconques. On les

déduit de la considération de certaines fonctions ζ ou ζ' relatives aux éléments $d\omega$ ou $d\omega'$ de la surface dont on s'occupe. En désignant par l et l' la densité de la distribution d'une couche électrique en équilibre sur la surface, de telle sorte que Δ étant la distance de $d\omega$ à $d\omega'$, on ait

$$\int\int \frac{l'\,d\omega'}{\Delta} = \text{constante},$$

les fonctions ζ, dont nous parlons, sont définies par des équations de la forme

$$\int\int \frac{l'\zeta'\,d\omega'}{\Delta} = m\zeta,$$

m étant une constante qui change lorsqu'on passe d'une des fonctions ζ à une autre.

» D'après l'étude que j'en ai faite, je n'hésite pas à regarder les fonctions ζ comme étant de la plus haute importance en analyse. Mais ce n'est pas incidemment qu'il convient de traiter ce sujet difficile. Je me propose d'y revenir bientôt dans une communication spéciale. »

Sur les fonctions de Laplace, qui résultent du développement de

$$\{a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\theta - \theta')] + a'^2\}^{-\frac{1}{2}}:$$

Par M. JACOBI [*].

I.

Toute expression de la forme

$$V = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

peut se représenter par l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A + iB\cos\alpha + iC\sin\alpha},$$

où $i = \sqrt{-1}$. Soient donc

$A = a\cos\omega - a'\cos\varphi$, $B = a\sin\omega\cos\theta - a'\sin\varphi\cos\theta'$, $C = a\sin\omega\sin\theta - a'\sin\varphi\sin\theta'$.

L'expression que nous nous proposons de développer s'exprimera ainsi :

$$V = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\theta - \theta')] + a'^2}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{a[\cos\omega + i\sin\omega\cos(\theta - \alpha)] - a'[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\theta' - \alpha)]}.$$

Soit, pour le développement en question,

$$V = \frac{Y_0}{a} + Y_1\frac{a'}{a^2} + Y_2\frac{a'^2}{a^3} + \ldots.$$

D'après la formule précédente, le terme général Y_n sera fourni par l'intégrale définie

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\theta' - \alpha)]^n\, d\alpha}{[\cos\omega + i\sin\omega\cos(\theta - \alpha)]^{n+1}}.$$

En posant

$$[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\theta' - \alpha)]^n = X_n + 2iX'_n\cos(\theta' - \alpha) - 2X''_n\cos 2(\theta' - \alpha)\ldots$$
$$[\cos\omega + i\sin\omega\cos(\theta - \alpha)]^{-(n+1)} = P_n + 2iP'_n\cos(\theta - \alpha) - 2P''_n\cos 2(\theta - \alpha)\ldots$$

l'expression précédente de Y_n devient

$$Y_n = P_nX_n - 2P'_nX'_n\cos(\theta - \theta') + 2P''_nX''_n\cos 2(\theta - \theta')\ldots.$$

[*] Dans cette Note, que nous empruntons à un journal italien, M. Jacobi a reproduit, mais avec quelques différences de détail, un précédent article écrit en allemand et que les géomètres, curieux à si juste titre des moindres idées de l'illustre analyste, trouveront dans le *Journal de M. Crelle*, tome XXVI, page 81. (J. L.)

Les quantités P_n, P'_n,... dépendent seulement de ω; les quantités X_n, X'_n,... seulement de φ. En outre, les quantités correspondantes $P_n^{(m)}$, $X_n^{(m)}$ doivent être les mêmes fonctions (du moins à un facteur numérique près) l'une de ω et l'autre de φ. C'est une conséquence immédiate de la nature même de la fonction V qui reste la même (d'où il résulte que le coefficient Y_n reste aussi le même) lorsqu'on change l'une dans l'autre les deux quantités ω et φ.

En faisant $\omega = 0$, l'intégrale par laquelle on vient d'exprimer la valeur de Y_n se réduit à

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\theta' - \alpha)]^n\, d\alpha,$$

et en substituant à la quantité sous le signe $\int$ son développement écrit ci-dessus, on en conclut pour ce cas particulier $Y_n = X_n$. En même temps V se change en

$$V = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2}}.$$

Donc l'équation

$$V = \frac{Y_0}{a} + Y_1\frac{a'}{a^2} + Y_2\frac{a'^2}{a^3} + \ldots$$

devient, par la supposition de $\omega = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2}} = \frac{X_0}{a} + X_1\frac{a'}{a^2} + X_2\frac{a'^2}{a^3} + \ldots$$

De la même manière, en posant $\varphi = 0$, on obtient

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos\omega + i\sin\omega\cos(\theta - \alpha)]^{-(n+1)}\, d\alpha = P_n,$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa'\cos\omega + a'^2}} = \frac{P_0}{a} + P_1\frac{a'}{a^2} + P_2\frac{a'^2}{a^3} + \ldots.$$

Quant aux premiers coefficients, dans ces deux cas on a $X_0 = P_0 = 1$, comme on le voit en faisant $a' = 0$. Dans les intégrales qui déterminent les autres X_n, P_n, on peut écrire simplement α au lieu de $\theta' - \alpha$ et de $\theta - \alpha$. D'ailleurs ce sont deux fonctions toutes pareilles de φ et de ω qui ne diffèrent pas même l'une de l'autre par quelque facteur numérique puisque les deux radicaux dont ces fonctions proviennent sont identiques quand $\varphi = \omega$. De là on conclut ce théorème:

« Soient

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2}} = \frac{1}{a} + X_1\frac{a'}{a^2} + \ldots + X_n\frac{a'^n}{a^{n+1}} + \ldots,$$

» et P_n ce que devient X_n lorsqu'on y change φ en ω; on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos(\theta - \theta')] + a'^2}} = \frac{1}{a} + P_1X_1\frac{a'}{a^2} + P_2X_2\frac{a'^2}{a^3} + \ldots.$$

Ce beau résultat a été donné pour la première fois par Legendre dans ses Recherches sur la figure de la Terre.

II.

Les valeurs de X_n, $X'_n, \ldots$, P_n, $P'_n, \ldots$ peuvent se trouver au moyen du théorème de Taylor et d'une extension importante de ce théorème relative au cas d'une fonction de $p + z$ dont le développement doit contenir tout à la fois des puissances positives et des puissances négatives de z.

Posons $\cos\varphi = x$, $i \sin\varphi . e^{i\alpha} = z$, nous obtiendrons l'équation remarquable

$$2z(\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\alpha) = (x + z^2 - 1.$$

En écrivant α au lieu de $\theta' - \alpha$ dans la série donnée ci-dessus pour le développement de $[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\theta' - \alpha)]^n$, et introduisant des exponentielles au lieu des cosinus, on a

$$[(x + z^2 - 1]^n = 2^n z^n (\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\alpha)^n$$

$$= 2^n z^n \left(\begin{array}{l} X_n + iX'_n e^{i\alpha} - X''_n e^{2i\alpha} - iX'''_n e^{3i\alpha} \ldots \\ \quad + iX'_n e^{-i\alpha} - X''_n e^{-2i\alpha} - iX'''_n e^{-3i\alpha} \ldots \end{array} \right)$$

$$= 2^n z^n \left(\begin{array}{l} X_n + X'_n \dfrac{z}{\sin\varphi} + X''_n \dfrac{z^2}{\sin^2\varphi} + X'''_n \dfrac{z^3}{\sin\varphi} \cdots \\ \quad - X'_n \sin\varphi . z^{-1} + X''_n \sin^2\varphi . z^{-2} - X'''_n \sin^3\varphi . z^{-3} \ldots \end{array} \right).$$

Or $\sin\varphi = \sqrt{1 - x^2}$, et les quantités $X_n^{(m)}$ sont des fonctions de x seule. La série précédente est donc une série ordonnée suivant les puissances de z, et le coefficient de z^{n+m} dans cette série est exprimé par la fonction de x suivante

$$\frac{2^n}{\sin^m\varphi} X_n^{(m)} = \frac{2^n}{\sqrt{(1 - x^2)^m}} X_n^{(m)}.$$

Mais par le théorème de Taylor, ce même coefficient est égal à

$$\frac{d^{n+m}.(x^2 - 1)^n}{\Pi(n + m)\, dx^{n+m}},$$

où $\Pi(k) = 1.2.3 \ldots k$. Par suite, il vient

$$X_n^{(m)} = \frac{\sin^m\varphi}{2^n} . \frac{d^{n+m}.(x^2 - 1)^n}{\Pi(n + m)\, dx^{n+m}}.$$

Pour $m = 0$, cela fournit

$$X_n = \frac{d^n.(x^2 - 1)^n}{2^n \Pi(n)\, dx^n},$$

d'où pour $X_n^{(m)}$ cette expression générale

$$X_n^{(m)} = \frac{\Pi(n)}{\Pi(n + m)} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_n}{dx^m}.$$

Pour trouver maintenant $P_n^{(m)}$, je fais

$$\cos\omega = p, \quad i \sin\omega . e^{i\gamma} = z,$$

d'où résulte encore

$$[p+z^2-1]^{-(n+1)} = (2z)^{-(n+1)}(\cos\omega - i\sin\omega\cos z)^{-(n+1)}$$

$$= (2z)^{-(n+1)}\left(P_n + P'_n\frac{z}{\sin\omega} + P''_n\frac{z^2}{\sin^2\omega} + \ldots - P'_n\sin\omega.z^{-1} + P''_n\sin^2\omega.z^{-2} - \ldots\right).$$

Le coefficient de $z^{-(n+1)+m}$ dans cette formule est $\frac{2^{-(n+1)}}{\sin^m\omega}P_n^{(m)}$. Pour obtenir une autre valeur de ce même coefficient du développement de $[(p+z)^2-1]^{-(n+1)}$, j'observe que le principe sur lequel repose la formule de Taylor (à savoir l'égalité des dérivées partielles par rapport à p et z d'une fonction de $p+z$) reste applicable même aux développements qui, comme le précédent, contiennent à la fois des puissances positives et des puissances négatives de z à l'infini. Dans un développement de ce genre, soit u le coefficient de $z^{-(n+1)}$; et le coefficient de $z^{-(n+1)+m}$ sera $(-1)^m\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\cdot\frac{d^m u}{dp^m}$. Dans le développement proposé de $[(p+z)^2-1]^{-(n+1)}$, le coefficient de $z^{-(n+1)}$ est $2^{-(n+1)}P_n$, et généralement le coefficient de $z^{-(n+1)+m}$ est $\frac{2^{-(n+1)}}{\sin^m\omega}\cdot P_n^{(m)}$. En appliquant donc à ce développement la règle générale qu'on vient d'indiquer, et multipliant par $2^{n+1}\sin^m\omega$, on obtient

$$P_n^{(m)} = (-1)^m.\sin^m\omega\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\cdot\frac{d^m P_n}{dp^m}.$$

Mais P_n est fonction de p comme X_n l'est de x, en sorte que

$$P_n = \frac{d^n.(p^2-1)^n}{2^n\Pi(n)\,dp^n}:$$

on aura donc, en général,

$$P_n^{(m)} = (-1)^m\frac{\Pi(n-m)}{2^n\Pi(n).\Pi(n)}\cdot(1-p^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^{n+m}.(p^2-1)^n}{dp^{n+m}}.$$

En substituant les valeurs trouvées pour $X_n^{(m)}$, $P_n^{(m)}$, l'expression de Y_n rapportée ci-dessus,

$$Y_n = P_n X_n - 2P'_n X'_n\cos(\theta-\theta') + 2P''_n X''_n\cos 2(\theta-\theta') \text{ etc.},$$

devient

$$Y_n = P_n X_n + \frac{2\Pi(n-1)\sin\omega\sin\varphi}{\Pi(n+1)}\cdot\frac{dP_n}{dp}\cdot\frac{dX_n}{dx}\cos(\theta-\theta')$$

$$+ \frac{2\Pi(n-2)\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\Pi(n+2)}\cdot\frac{d^2P_n}{dp}\cdot\frac{d^2X_n}{dx}\cos 2(\theta-\theta') - \text{etc.}$$

Telle est l'expression du terme général Y_n auquel Laplace a appliqué un procédé tout à fait différent.

SUR

LES EXPONENTIELLES SUCCESSIVES D'EULER

ET

LES LOGARITHMES DES DIFFÉRENTS ORDRES DES NOMBRES;

PAR M. J.-H. GRILLET,

Élève de l'École normale

1. La première partie des *Actes de l'Académie de Saint-Pétersbourg* pour l'année 1777, contient un Mémoire d'Euler sur l'expression

$$b^{b^{b^{b^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}.$$

que Condorcet avait trouvée pour la somme d'une série particulière. Je rencontrai cette même expression en cherchant la solution d'un certain problème, et je l'étudiai. Je ne crois pas hors de propos de faire connaître les résultats auxquels je suis parvenu, parce qu'ils sont plus précis et plus complets que ceux d'Euler; j'y joindrai la solution du problème qui m'a conduit à m'occuper de ces questions.

2. L'expression de Condorcet, que je représenterai par $F_n(b, u)$, n désignant le nombre des lettres b, n'a pas de limite, pour n croissant indéfiniment, quand b est plus grand que $e^{\frac{1}{e}} = 1,444667\ldots$. Si b est compris entre 1 et $e^{\frac{1}{e}}$, elle aura, pour des valeurs convenables de u, une limite x donnée par l'équation

$$x = b^x$$

qui a deux racines positives: l'une, a, comprise entre 1 et e; l'autre, A, plus grande que $e = 2,718\,28\ldots$. Toutes les fois que u est plus petit que A, l'expression a pour limite a; si $u = \mathrm{A}$, elle est égale à A,

quel que soit le nombre de lettres b qu'elle contienne; si u est plus grand que A, elle n'a plus de limite.

En effet, l'équation

$$x = b^x,$$

qui fournit la limite quand il y en a une, n'a de racine réelle que si b ne surpasse point $e^{\frac{1}{e}}$, car la droite $y = x$ est tangente à la courbe $y = \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^x$. Si b est compris entre 1 et $e^{\frac{1}{e}}$, la droite $y = x$ coupe la courbe $y = b^x$ en deux points dont les ordonnées sont a et A, et comme l'ordonnée du point de contact de la tangente menée par l'origine à la courbe est toujours égale à e, quel que soit b, on voit que a est toujours compris entre 1 et e, et A entre e et ∞. Si b tend vers l'unité, $a > b$ tend aussi vers l'unité, tandis que A croît indéfiniment.

Si u désigne une ordonnée de la droite $y = x$, b^u sera l'ordonnée de la courbe qui correspond à la même abscisse; donc quand u est plus petit que a, b^u est plus grand que u, mais encore inférieur à a; $F_n(b, u)$ croît avec n et tend vers a; si u est compris entre a et A, b^u est moindre que u, mais plus grand que a, $F_n(b, u)$ décroît et tend vers a quand n croît indéfiniment. Si u est plus grand que A, $F_n(b, u)$ croît avec n et ne peut avoir de limite, car elle serait plus grande que $u > A$.

On arrive bien simplement à ces résultats en suivant, sur une figure, la marche de la fonction $F_n(b, u)$ quand n croît. Soient, par exemple, *Pl. I, fig.* 1, amA la courbe $y = b^x$, OaA la droite $y = x$, $aa' = a$, $AA' = A$, et soit MM' un nombre u compris entre a et A; si MM', NN', PP', QQ',... sont parallèles à OY, mN, nP, pQ,... parallèles à OX, on a

$$NN' = b^u = F_1(b, u), \quad PP' = F_2(b, u), \quad QQ' = F_3(b, u), \ldots;$$

donc $F_n(b, u)$ a pour limite a quand n croît indéfiniment.

Euler a exprimé a, A, b en fonction du rapport $\frac{A}{a} = p$. On a

$$a = p^{\frac{1}{p-1}}, \quad A = pa, \quad b = a^{\frac{1}{a}};$$

ces formules font connaître exactement une infinité de valeurs correspondantes de a, A, b; il suffit de faire varier p entre 1 et ∞.

3. Si b est compris entre 1 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e = 0{,}065988\ldots$, $F_n(b, u)$ a toujours une limite, quelle que soit la valeur réelle de u. Cette limite est la racine unique α de l'équation

$$x = b^x$$

Si b est compris entre 0 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, l'expression n'a plus de limite, à moins que u ne soit égal à la racine unique γ de l'équation $x = b^x$, et, dans ce cas, elle est toujours égale à γ, quel que soit le nombre de lettres b qu'elle renferme. Mais pour une valeur quelconque de u, l'expression où n'entreraient jamais qu'un nombre pair de lettres b a une limite quand ce nombre augmente, et celle où il n'en entrerait qu'un nombre impair a une autre limite. Ces deux limites sont données par l'équation

$$x = b^{b^x}$$

qui a trois racines positives : l'une est γ, les deux autres sont comprises, l'une, c, entre b et γ; l'autre, C, entre γ et 1, et l'on a

$$b < c < \gamma < C < 1.$$

Si l'on prend toujours un nombre impair de lettres b, l'expression de Condorcet a pour limite c, quand $u > \gamma$, et pour limite C, quand $u < \gamma$.

L'inverse a lieu quand on prend toujours un nombre pair de lettres b.

Pour arriver à ces propositions, je vais démontrer que les deux courbes $y = b^x$, $X = b^X$ ne se coupent qu'en un point, lorsque b est compris entre 1 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, et en trois points, si b est compris entre $\left(\frac{1}{e}\right)^e$ et 0. Il est d'abord évident, *fig.* 2, que si l'angle $O\gamma T$ que fait avec la bissectrice de l'angle des axes la tangente à la courbe $y = b^x$ menée par le point $y = x$, est plus petit qu'un angle droit, c'est-à-dire si b est compris entre 0 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, il y aura plusieurs points d'intersection. Ces points seront situés deux à deux sur une même perpendiculaire à $O\gamma$, et si l'on considère un de ces groupes de deux points, que C et c soient

leurs ordonnées et que l'on désigne par p le rapport $\frac{C}{c}$ plus grand que l'unité de ces deux ordonnées, on aura

$$c = b^{C}, \quad C = b^{c},$$

$$c = p^{\frac{p}{1-p}}, \quad C = p^{\frac{1}{1-p}}, \quad b = \left(p^{\frac{p}{p-1}}\right).$$

$$\frac{dc}{dp} = \frac{c}{(p-1)^2}(1 - p + lp), \quad \frac{dC}{dp} = \frac{c}{(p-1)^2}(1 - p + plp),$$

$$\frac{db}{dp} = \frac{b}{C(p-1)^2}[p(lp)^2 - (p-1)^2].$$

Si p croît à partir de l'unité, $\frac{db}{dp}$ est toujours négatif, ce dont on peut s'assurer en remarquant que

$$p(lp)^2 - (p-1)^2$$

est de même signe que

$$[\sqrt{p}\, lp - (p-1)].$$

ou, si l'on pose

$$lp = z,$$

que

$$\left[ze^{\frac{z}{2}} - (e^z - 1)\right].$$

En développant cette expression, on verra que, pour toute valeur de z plus grande que 0, elle est négative. De même, $\frac{dc}{dp}$ est négatif, $\frac{dC}{dp}$ positif. Si p croît indéfiniment, c tend vers zéro, C vers l'unité et b vers zéro; si p décroît et tend vers l'unité, c et C tendent vers $\left(\frac{1}{e}\right)$ et b vers $\left(\frac{1}{e}\right)^e$. Si donc p croît indéfiniment à partir de 1, b décroît continuellement de $\left(\frac{1}{e}\right)^e$ à 0, c de $\left(\frac{1}{e}\right)$ à 0 et C croît de $\left(\frac{1}{e}\right)$ à 1.

De là résulte qu'à une valeur de p ne correspond qu'une valeur de b, et réciproquement; donc à une valeur de b ne correspondent qu'une

seule valeur de c et une seule de C. Il n'y a donc plusieurs points d'intersection que quand b est compris entre $\left(\frac{1}{e}\right)^e$ et o, et alors il n'y en a que trois dont un sur la droite $y = x$.

4. On a, entre les ordonnées des deux logarithmiques $y = b^x$, $X = b^X$, et de la droite $\eta = \xi$ qui correspond à une même abscisse, les relations

$$(1) \qquad y = b^c, \quad y = b^{b^c}.$$

Mais si, dans la fonction $F_n(b, u)$, on remplace u par $u' > u$, l'exposant de la $n^{ième}$ lettre b augmente, celui de la $(n-1)^e$ diminue, celui de la $(n-2)^e$ augmente, etc.... Donc

$$F_{2n}(b, u') > F_{2n}(b, u), \qquad F_{2n+1}(b, u') < F_{2n+1}(b, u).$$

Si b est compris entre $\left(\frac{1}{e}\right)^e$ et 1, et que u soit plus petit que la racine α de l'équation

$$x = b^x,$$

b^u est plus grand que α, b^{b^u} est plus petit que α, mais cependant plus grand que u en vertu des équations (1); donc

$F_{2n}(b, u)$ croît avec n en restant plus petit que α; il a une limite S.

$F_{2n+1}(b, u)$ décroît en restant plus grand que α quand n augmente; il tend vers une limite S'. S et S' sont des racines de l'équation

$$x = b^{b^x},$$

que l'on obtient par l'intersection des deux courbes $X = b^X$, $y = b^{b^x}$. Ces deux courbes ne se coupent qu'en un point, qui donne la racine α; donc $F_{2n}(b, u)$, $F_{2n+1}(b, u)$ ont tous deux pour limite α quand $u < \alpha$: il en est de même quand u est plus grand que α.

On prouverait de la même manière que si b est compris entre o et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, que u soit plus petit que c, $F_{2n}(b, u)$ croît avec n et tend vers c, $F_{2n+1}(b, u)$ décroît quand n augmente et tend vers C. Si u est compris entre γ et c, $F_{2n}(b, u)$ décroît et tend vers c quand n augmente, tandis que $F_{2n+1}(b, u)$ croît avec n et tend vers C; de sorte que, généralement,

toutes les fois que u est plus petit que γ, $F_{2n}(b, u)$ a pour limite c, $F_{2n+1}(b, u)$ a pour limite C. Ce serait le contraire si u était plus grand que γ.

On peut encore suivre les fonctions $F_{2n}(b, u)$, $F_{2n+1}(b, u)$ sur une figure. Ainsi soient, *fig.* 2, $cm\gamma C$ la courbe $y = b^x$, $cm'\gamma C$ la courbe $X = b^X$, $CC' = C$, $\gamma\gamma' = \gamma$, $cc' = c$, et $q'Q' = u$ un nombre compris entre γ et c. Si QQ', pp' NN', MM',... sont parallèles à OY, qp', pn', nm',... parallèles à OX, on a

$$F_1(b, u) = QQ', \quad F_3(b, u) = PP', \quad F_5(b, u) = NN', \quad F_7(b, u) = MM', \ldots$$

$$F_2(b, u) = qQ', \quad F_4(b, u) = pP', \quad F_6(b, u) = nN', \quad F_8(b, u) = mM', \ldots;$$

donc

$$\lim. F_{2n+1}(b, u) = C, \quad \lim F_{2n}(b, u) = c.$$

5. Je passe maintenant au problème que j'ai annoncé précédemment. Je désigne les expressions

$$\log N, \quad \log.\log N, \quad \log.\log.\log N, \ldots$$

par

$$lN, \quad l_2N, \quad l_3N, \ldots.$$

et je les appelle généralement les logarithmes des différents ordres de N. Je me suis proposé de déterminer entre quels nombres doit être comprise la base b d'un système de logarithmes, pour que tous les logarithmes des différents ordres d'un nombre donné N soient réels dans ce système. Voici quels sont les résultats que j'ai obtenus :

Si N est plus grand que e, il faut et il suffit que b soit compris entre 1 et $e^{\frac{1}{e}}$.

Si N est compris entre 1 et e, il faut et il suffit que b soit compris entre 1 et $N^{\frac{1}{N}}$.

Dans le système de logarithmes dont la base b est comprise entre 1 et $e^{\frac{1}{e}}$, le logarithme de l'ordre n d'un nombre quelconque compris entre les racines de l'équation

$$x = b^x$$

désignées précédemment par a et A, augmente avec n et a pour limite A; celui d'un nombre plus grand que A diminue quand N augmente, et a encore pour limite A.

Démonstration. Si $l_n(\mathrm{N})$ reste toujours réel dans le système de base b, il faut qu'il soit toujours plus grand que b, sans quoi $l_{n+3}(\mathrm{N})$ serait imaginaire; or on a

$$\mathrm{N} = \mathrm{F}_n(b, l_n\mathrm{N}),$$

donc

$$\mathrm{N} > \mathrm{F}_n(b, b),$$

quel que soit n.

Il faut que $\mathrm{F}_n(b, b)$, qui croît avec n, ait une limite, et b doit être compris entre 1 et $e^{\frac{1}{e}}$, si N est plus grand que e; entre 1 et $\mathrm{N}^{\frac{1}{\mathrm{N}}}$, si N est compris entre 1 et e. Ces conditions sont suffisantes, puisque dans la base $\left(\mathrm{N}^{\frac{1}{\mathrm{N}}}\right)$ les logarithmes des différents ordres de N sont tous égaux à N.

Si N est compris entre a et A, on voit, d'après la relation

$$\mathrm{N} = \mathrm{F}_n(b, l_n\mathrm{N}),$$

que $l_n\mathrm{N}$ croît avec n, car d'abord $l_n\mathrm{N}$ est toujours compris entre a et A, puisque

$$l_n a = a, \quad l_n \mathrm{A} = \mathrm{A};$$

en outre, $\mathrm{F}_{n+1}(b, l_n\mathrm{N})$ est plus petit que $\mathrm{F}_n(b, l_n\mathrm{N})$; donc, puisque

$$\mathrm{F}_{n+1}(b, l_{n+1}\mathrm{N}) = \mathrm{F}_n(b, l_n\mathrm{N}),$$

on doit avoir

$$l_{n+1}\mathrm{N} > l_n\mathrm{N}.$$

$l_n\mathrm{N}$ croît donc avec N en restant inférieur à A, et il a une limite donnée par l'équation

$$lx = x \quad \text{ou} \quad x = b^x.$$

Comme cette limite ne peut être a, elle est égale à A. De même, si N est plus grand que A, $l_n\mathrm{N}$ décroît quand n augmente et tend aussi vers A.

On peut arriver à ces résultats en suivant, sur la *fig.* 1, la marche de la fonction $l_n N$.

6. Si la base b est comprise entre 1 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, il n'y a qu'un nombre dont tous les logarithmes des différents ordres soient réels: ce nombre est la racine α de l'équation

$$x = b^x.$$

dont tous les logarithmes sont égaux à α.

Si la base b du système est comprise entre 0 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, pour que tous les logarithmes des différents ordres d'un nombre soient réels dans ce système, il faut et il suffit qu'il soit compris entre les racines c et C de l'équation

$$x = b^{b^x},$$

et le logarithme de l'ordre n de tout nombre compris entre c et C tend vers la limite γ quand n croît indéfiniment.

Démonstration. Pour c et C on a toujours

$$l_{2n} c = c, \quad l_{2n+1} c = C, \quad l_{2n} C = C, \quad l_{2n+1} C = c.$$

Il faut encore, pour que $l_n N$ soit toujours réel, qu'il reste plus grand que b; donc, en vertu de la relation

$$N = F_n(b, l_n N),$$

on aura

$$N > F_{2n}(b, b),$$
$$N < F_{2n+1}(b, b).$$

Si b est compris entre 1 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, il faut que N soit égal à α; si b est compris entre 0 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, il faut que N soit compris entre c et C. Ces conditions sont suffisantes, puisque les logarithmes des différents ordres de c et C sont réels.

7. Si N est compris entre 1 et $\frac{1}{e}$, il faut et il suffit, pour que les

logarithmes des différents ordres de N soient réels, que l'on ait

$$b < \left(\frac{\varpi^{\varpi}}{\varpi^{\varpi - 1}} \right),$$

ϖ désignant la racine plus grande que 1 de l'équation

$$p^{\frac{1}{1-\varpi}} = N;$$

si N est compris entre 0 et $\frac{1}{c}$, la même inégalité devra avoir lieu, ϖ désignant la racine plus grande que 1 de l'équation

$$p^{\frac{1}{1-\varpi}} = N;$$

cela résulte des formules qui expriment c et C en fonction de p.

Si N est compris entre c et C, $l_n N$ tend vers γ quand n croît indéfiniment; cela se démontre comme dans le cas d'une base plus grande que l'unité, et l'on peut aussi suivre la marche de $l_n N$ sur la *fig.* 9.

ADDITION A LA NOTE

SUR QUELQUES INTÉGRALES MULTIPLES,

INSÉRÉE DANS LE CAHIER D'AVRIL [*];

PAR M. A. CAYLEY.

On démontre, au moyen des formules que j'ai données sur ce sujet, une propriété remarquable de l'intégrale multiple

$$V = \int dx_1 \ldots dx_n\, x_1^{2\alpha_1 - 1} \ldots x_n^{2\alpha_n - 1} \ldots \varphi(a_1 - x_1 t, \ldots),$$

prise entre les limites

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{h_n^2} = 1.$$

En effet, en supposant toujours que l'on peut développer la fonction φ selon les puissances entières et positives de t, l'intégrale V peut s'exprimer sous la forme

$$V = \frac{(-1)^{f+k}\pi^{\frac{1}{2}n}\, t^f}{2^{k+f}} \left(\frac{d}{da_1} \cdots \frac{d}{da_f}\right) \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(h_n^3 \frac{d}{dh_n}\right)^{\alpha_n} h_1^3 \ldots h_{f+1} \ldots U,$$

où

$$k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

$$U = S_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}.\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(p+k-f+\frac{1}{2}n+1\right)} \nabla^p \varphi(a_1, \ldots)\right),$$

$$\nabla = h_1^2 \frac{d^2}{da_1^2} + \ldots + h_n^2 \frac{d^2}{da_n^2}.$$

Soit

$$W = \int dx_1 \ldots \varphi(a_1 - x_1 t, \ldots)$$

entre les mêmes limites que V. On a

$$W = \pi^{\frac{1}{2}n} h_1 \ldots h_n S_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}.\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}n+1\right)} \nabla^p \varphi(a_1, \ldots)\right)$$

[*] Voir page 158.

En multipliant par

$$\frac{2}{\Gamma(h+f)} T^{n+1}(1-T^2)^{h+f} dT,$$

et intégrant depuis $T=0$ jusqu'à $T=1$, on obtient

$$\frac{2}{\Gamma(h+f)} \int_0^1 T^{n+1}(1-T^2)^{h+f} W\, dT$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}n} h_1 \ldots h_n \mathbf{S}_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{t^p}{2^p \Gamma(p+1)\Gamma(p+h+f+n+1)} \nabla^p \varphi(a_1, \ldots) \right);$$

puisque en général

$$\frac{2}{\Gamma(h+f)} \int_0^1 T^{2p+n+1}(1-T^2)^{h+f} dT = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2}n+1)}{\Gamma(p+h+f+\frac{1}{2}n+1)}.$$

On a donc l'équation

$$\frac{2}{\Gamma(h+f)} \int_0^1 T^{n+1}(1-T^2)^{h+f} W\, dT = \pi^{\frac{1}{2}n} h_1 \ldots h_n U.$$

Mettons la valeur de U qui en résulte, dans l'équation entre V et U : faisons aussi $t=1$, ce qui ne nuit pas à la généralité. On a, en rassemblant les formules,

$$V = \int dx_1 \ldots dx_n \ldots x_1^{\alpha_1+1} \ldots x_n^{\alpha_n+1} \varphi(a_1 - x_1, \ldots),$$

$$W = \int dx_1 \ldots dx_n \varphi(a_1 - x_1 T, \ldots),$$

$$V = \frac{2}{\Gamma(h+f)} \left(\frac{d}{da_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{d}{da_n}\right)^{\alpha_n} \left(h_1 \frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(h_n \frac{d}{dh_n}\right)^{\alpha_n} h_1 \ldots h_n \int_0^1 T^{n+1}(1-T^2)^{h+f} W\, dT.$$

Ce qui établit ce théorème : La suite des intégrales V s'exprime au moyen des coefficients différentiels par rapport à $h_1 \ldots h_n$ et $a_1 \ldots a_n$ de la seule intégrale

$$\int_0^1 T^{n+1}(1-T^2)^{h+f} \int dx_1 \ldots dx_n \ldots \varphi(a_1 - x_1 T, \ldots)$$

En supposant que les indices dans V soient tous pairs, on a $f=0$. Les

symboles $\frac{d}{da_1}\cdots$ n'entrent plus dans l'expression de V. En changeant la fonction φ, on a ces formules plus simples

$$\left\{\begin{aligned} V &= \int dx_1 \ldots dx_n \,.\, x_1^{2\alpha_1} \ldots x_n^{2\alpha_n} \,.\, \varphi(x_1, \ldots, x_n), \\ W &= \int dx_1 \ldots dx_n \,.\, \varphi(Tx_1, \ldots, Tx_n). \\ V &= \frac{1}{2^k \Gamma k} \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(h_n^3 \frac{d}{dh_n}\right)^{\alpha_n} \int_0^1 T^{n-1}(1 - T^2)^k W\, dT. \end{aligned}\right.$$

où V s'exprime au moyen des coefficients différentiels par rapport à $h_1, \ldots, h_n$ de l'intégrale

$$\int_0^1 T^{n-1}(1 - T^2)^k \int dx_1 \ldots dx_n \,.\, \varphi(Tx_1, \ldots, Tx_n).$$

de manière que nous avons trouvé des relations entre des intégrales définies qui contiennent une fonction indéterminée, assujettie à la seule condition d'être développable dans les limites de l'intégration selon les puissances entières et positives des variables [*], mais dans lesquelles les limites sont données par

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{h_n^2} = 1.$$

[*] Cette condition est supposée dans la démonstration, mais il me paraît, d'après la forme du résultat, qu'elle n'est pas essentielle.

MÉMOIRE

SUR LES COURBES A DOUBLE COURBURE

ET LES SURFACES DÉVELOPPABLES;

PAR M. A. CAYLEY.

On trouve, dans la *Théorie des courbes algébriques* de M. Plucker, de très-belles recherches sur le nombre des différentes singularités (points d'inflexion, tangentes doubles, etc.) des courbes planes. Les mêmes principes peuvent s'appliquer au cas des courbes à trois dimensions. Pour cela, considérons une suite continue de points dans l'espace, les lignes qui passent par deux points consécutifs, et les plans qui passent par trois points consécutifs; ou, en envisageant autrement la même figure, une suite de lignes dont chacune rencontre la ligne consécutive, les points d'intersection de deux lignes consécutives, et les plans qui contiennent ces lignes; ou encore de cette manière: une suite de plans, les lignes d'intersection de deux plans consécutifs, les points d'intersection de trois plans consécutifs. C'est ce que l'on peut nommer *un système simple*. Ce système est évidemment formé d'une courbe à double courbure et d'une surface développable; la courbe est l'arête de rebroussement de la surface, la surface est l'osculatrice développable de la courbe. Les points du système sont des points dans la courbe, les lignes du système sont les tangentes à la courbe, les plans du système sont les plans osculateurs de la courbe. De même, les plans sont les plans tangents de la surface, les lignes sont les génératrices de la surface; pour les points, on peut les nommer les points de rebroussement de la surface. J'entendrai dans la suite par les termes *ligne par deux points*, *ligne dans deux plans*, une ligne menée par deux points quelconques (non consécutifs en général) du système, et la ligne d'intersection de deux plans quelconques (non consécutifs en général) du système. Enfin, chaque ligne du système est rencontrée,

en général, par un certain nombre d'autres lignes non consécutives du système. Je nommerai le point de rencontre d'une telle paire de lignes *point dans deux lignes*, et le plan qui contient une telle paire *plan par deux lignes*.

Supposons qu'un plan donné contient, *en général*, m points du système, qu'une ligne donnée rencontre, *en général*, r lignes du système, qu'un point donné est situé, *en général*, dans n plans du système. Le système est dit être de l'ordre m, du rang r, de la classe n. On voit tout de suite que l'ordre de la courbe est égal à l'ordre du système, ou à m; la classe de la courbe au rang du système, ou à r. Et de même, l'ordre de la surface au rang du système, ou à r; la classe de la surface à la classe du système, ou à n.

Cela posé, les singularités proprement dites (ouvrage cité, page 202) sont les deux suivantes, analogues aux points d'inflexion et de rebroussement dans les courbes planes :

1. Quand quatre points consécutifs sont situés dans le même plan, ou, autrement dit, quand trois lignes consécutives sont situées dans le même plan, ou quand deux plans consécutifs deviennent identiques; je dirai qu'il y a alors un *plan stationnaire*, et je représenterai par la lettre α le nombre de ces plans.

2. Quand quatre plans consécutifs se rencontrent dans le même point, ou, autrement dit, quand trois lignes se rencontrent au même point, ou quand deux points consécutifs deviennent identiques; je dirai qu'il y a alors un *point stationnaire*, et je représenterai par β le nombre de ces points.

Dans le premier cas, il y a un point d'inflexion sphérique dans la courbe, et une ligne d'inflexion dans la surface. On n'a pas donné de noms à ce qui arrive dans la courbe et la surface dans le second cas; et puisque la singularité est suffisamment distinguée déjà en la nommant *point stationnaire*, il n'est pas nécessaire de suppléer à cette omission. On peut dire que ces deux cas sont les singularités simples d'un système. Il y a des singularités d'un ordre plus élevé dont on n'a pas besoin ici. Ensuite, il y a des singularités d'une autre espèce, en quelque sorte analogues aux points et tangentes doubles, mais qui ont rapport à un point ou plan indéterminé (hors du système); savoir :

3. Un plan donné peut contenir, *en général*, un nombre g de *lignes en deux plans*.

4. Un point donné peut être situé, *en général*, dans un nombre h de *lignes par deux points*.

5. Un plan donné peut contenir, *en général*, un nombre x de *points en deux lignes*.

6. Un point donné peut être situé, *en général*, dans un nombre y de *plans par deux lignes*.

Ces quatre cas sont les singularités impropres simples du système.

Il faut maintenant chercher les relations qui ont lieu entre les nombres $m, r, n, z, \delta, g, h, x, y$.

Citons d'abord les formules de M. Plücker pour les courbes planes (page 211), en changeant seulement les lettres, pour éviter la confusion. En représentant par μ l'ordre d'une courbe, par ν sa classe, par ξ le nombre de ses points doubles, η de ses points de rebroussement, a de ses tangentes doubles, b de ses points d'inflexion, l'on aura les six équations

$$\begin{aligned}
\nu &= \mu.\overline{\mu-1} - 2\xi + 3\eta,\\
b &= 3\mu.\overline{\mu-2} - (6\xi + 8\eta),\\
a &= \tfrac{1}{2}\mu.\overline{\mu-2}.\overline{\mu^2-9} - (2\xi + 3\eta).(\mu.\overline{\mu-1} - 6) + 2\xi.\overline{\xi-1}\\
&\quad + \tfrac{9}{2}\eta.\overline{\eta-1} + 6\xi\eta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu &= \nu.\overline{\nu-1} - (2a + 3b),\\
\eta &= 3\nu.\overline{\nu-2} - (6a + 8b),\\
\xi &= \tfrac{1}{2}\nu.\overline{\nu-2}.\overline{\nu^2-9} - (2a + 3b).(\nu.\overline{\nu-1} - 6) + 2a.\overline{a-1}\\
&\quad + \tfrac{9}{2}b.\overline{b-1} + 6ab,
\end{aligned}$$

dont les trois dernières se dérivent des trois premières, et *vice versâ*.

Considérons ensuite un plan donné quelconque en conjonction avec le système. Ce plan coupe la surface suivant une courbe plane. Les points de cette courbe sont les points de rencontre du plan avec les lignes du système, les tangentes de cette courbe sont les lignes de rencontre

du plan avec les plans du système. Il est clair que la courbe est de l'ordre r et de la classe n. Chaque fois que le plan contient un point en deux lignes, la courbe a un point double; aux points où le plan rencontre la courbe à double courbure, il y a dans la courbe un rebroussement (car, dans ce cas, il y a deux lignes du système qui coupent le plan en un même point, c'est-à-dire qu'il y a dans la courbe d'intersection un point stationnaire ou de rebroussement). Quand le plan contient une ligne en deux plans, il y a dans la courbe une tangente double; et enfin, pour chaque plan stationnaire du système, il y a dans la courbe une tangente stationnaire ou une inflexion. Donc nous avons, dans la courbe, r l'ordre, n la classe, x le nombre de points doubles, m de points de rebroussement, g de tangentes doubles, α de points d'inflexion, ce qui donne les six équations (équivalentes à trois):

$$n = r.\overline{r-1} - (2x + 3m),$$

$$\alpha = 3r.\overline{r-2} - (6x + 8m),$$

$$g = \frac{1}{2} r\,\overline{r-2}\,\overline{r^2-9} - (2x + 3m)(r.\overline{r-1} - 6) + 2x.\overline{x-1}$$

$$+ \frac{9}{2} m.\overline{m-1} + 6xm;$$

$$r = n.\overline{n-1} - (2g + 3\alpha),$$

$$m = 3n.\overline{n-2} - (6g + 8\alpha),$$

$$x = \frac{1}{2} n\,\overline{n-2}\,\overline{n^2-q} - (2g + 3\alpha)(n.\overline{n-1} - 6) + 2g.\overline{g-1}$$

$$+ \frac{9}{2} \alpha.\overline{\alpha-1} + 6g\alpha,$$

(où l'on peut remarquer la symétrie à l'égard des combinaisons n, α, g, et r, m, x).

De même, en considérant un point donné quelconque en conjonction avec le système, ce point détermine, avec la courbe à double courbure, une surface conique, et, par des raisonnements pareils, on fait voir que, dans cette surface conique, l'ordre est m, la classe r, le nombre des lignes doubles n, des lignes de rebroussement δ, des plans tangents doubles y, des lignes d'inflexion h, ce qui donne les équations

(dont trois seulement sont indépendantes) :

$$r = m.\overline{m-1} - (2h + 3\mathfrak{E}),$$

$$n = 3m.\overline{m-2} - (6h + 8\mathfrak{E}),$$

$$y = \frac{1}{2} m.\overline{m-2}.\overline{m^2-9} - (2h + 3\mathfrak{E})(m.\overline{m-1} - 6) + 2h.\overline{h-1}$$
$$+ \frac{9}{2}\mathfrak{E}.\overline{\mathfrak{E}-1} + 6h\mathfrak{E};$$

$$m = r.\overline{r-1} - (2y + 3n),$$

$$\mathfrak{E} = 3r.\overline{r-2} - (6y + 8n),$$

$$h = \frac{1}{2} r.\overline{r-2}.\overline{r^2-9} - (2y + 3n)(r.\overline{r-1} - 6) + 2y.\overline{y-1}$$
$$+ \frac{9}{2} n.\overline{n-1} + 6yn.$$

(dans lesquelles on remarque la correspondance r, n, y; $m, \mathfrak{E}, h$. Et, en les comparant avec les autres six équations, la correspondance $m, r, n, \alpha, \mathfrak{E}, g, h, x, y$; $n, r, m, \mathfrak{E}, \alpha, h, g, y, x$).

En considérant une courbe à double courbure d'un ordre donné m, on peut attribuer à h, $\mathfrak{E}$ des valeurs quelconques (entre certaines limites), et l'on a alors, pour déterminer les autres quantités, les équations suivantes :

$$r = m.\overline{m-1} - (2h + 3\mathfrak{E}),$$

$$n = 3m.\overline{m-2} - (6h + 8\mathfrak{E}),$$

$$y = \frac{1}{2} m.\overline{m-2}.\overline{m^2-9} - (2h + 3\mathfrak{E})(m.\overline{m-1} - 6) + 2h.\overline{h-1}$$
$$+ \frac{9}{2}\mathfrak{E}.\overline{\mathfrak{E}-1} + 6h\mathfrak{E};$$

$$h = r.\overline{r-1} - (2x + 3m),$$

$$\alpha = 3r.\overline{r-2} - (6x + 8m),$$

$$g = \frac{1}{2} r.\overline{r-2}.\overline{r^2-9} - (2x + 3m)(r.\overline{r-1} - 6) + 2x.\overline{x-1}$$
$$+ \frac{9}{2} m.\overline{m-1} + 6mx.$$

Au cas d'une courbe plane, les trois premières équations continuent d'être vraies; mais les trois autres n'ont pas de sens. Le cas le plus simple est celui d'une courbe du troisième ordre dans l'espace. On a, dans ce cas, $m = 3$, $n = 1$, $\delta = 0$; et de là le système

$$\begin{array}{cccccccccc} m, & n, & r, & \alpha, & \delta, & g, & h, & x, & y; \\ 3, & 3, & 4, & 0, & 0, & 1, & 1, & 0, & 0; \end{array}$$

c'est-à-dire l'osculatrice développable d'une courbe du troisième ordre est une surface du quatrième ordre, etc. On obtient aussi un système très-simple, en écrivant $m = 4$, $h = 2$, $\delta = 1$, ce qui donne

$$\begin{array}{cccccccccc} m, & n, & r, & \alpha, & \delta, & g, & h, & x, & y; \\ 4, & 4, & 5, & 1, & 1, & 2, & 2, & 2, & 2. \end{array}$$

Mais cela n'appartient pas, à ce que je crois, aux courbes les plus générales du quatrième ordre.

Le problème de classifier les courbes à double courbure au moyen des surfaces que l'on peut faire par ces courbes, ou de trouver la nature d'une courbe qui est l'intersection de deux surfaces données, paraît appartenir plutôt à la théorie des surfaces qu'à celle des courbes. Je n'ai rien de complet à offrir sur cela. Seulement je crois pouvoir dire que quand la courbe d'intersection de deux surfaces des ordres μ, ν est de l'ordre $\mu\nu$ (ce qui est le cas général), on a toujours

$$2h = \mu\nu.\overline{\mu - 1}.\overline{\nu - 1},$$

de manière que la classe de la courbe est au plus $mn(m + n - 2)$. Mais j'espère revenir une autre fois sur cette question. Il est presque inutile de remarquer que pour un système qui est réciproque polaire d'un système donné, il faut seulement changer $m, r, n, \alpha, \delta, g, h, x, y$ en $n, r, m, \delta, \alpha, h, g, y, x$. Par exemple, les deux systèmes qui viennent d'être considérés ont des réciproques de la même forme.

NOTE

SUR DEUX SYSTÈMES GÉNÉRAUX DE TRAJECTOIRES ORTHOGONALES.

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

M. Serret, dans un Mémoire inséré au tome VIII de ce Journal (page 498), a déterminé les trajectoires orthogonales des courbes qui jouissent de cette propriété que le produit des distances d'un point quelconque de l'une d'elles aux sommets d'un polygone régulier est constant. Je me propose, dans le présent article, de donner une généralisation et une démonstration du théorème de M. Serret, fondées sur des considérations géométriques. Voici l'énoncé de notre théorème.

Désignons par $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ les distances d'un point O aux sommets $P_1, P_2, \ldots, P_n$ d'un polygone quelconque, et par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les angles OP_1P_2, $OP_2P_3, \ldots, OP_{n-1}P_n$; je dis que les équations

$$\text{U} \qquad r_1^{\lambda} r_2^{\mu} r_3^{\nu} \ldots r_n^{\varpi} = k^{\lambda+\mu+\nu+\ldots+\varpi},$$

$$\text{U}' \qquad \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 + \ldots + \varpi\omega_n = (\lambda + \mu + \ldots + \varpi)\delta,$$

où k et δ sont des paramètres arbitraires, $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varpi$ des nombres donnés quelconques), représentent deux systèmes de trajectoires orthogonales.

Soit OO' (δs) un élément d'une courbe quelconque du premier système (U), on a

$$\delta r_1 = \delta s \cos P_1OO',$$
$$\delta r_2 = \delta s \cos P_2OO',$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta r_n = \delta s \cos P_nOO'.$$

d'ailleurs l'équation (U) donne

$$\lambda \frac{\delta r}{r_1} + \mu \frac{\delta r}{r_2} + \ldots + \varpi \frac{\delta r}{r_n} = 0;$$

on aura donc

$$(u) \qquad \lambda \frac{\cos P_1 OO'}{r_1} + \mu \frac{\cos P_2 OO'}{r_2} + \ldots + \varpi \frac{\cos P_n OO'}{r_n} = 0.$$

Soit encore OO'' ($\partial s'$) un élément d'une courbe quelconque du système (U'), on aura

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial s'} = \frac{\sin P_1 OO''}{r_1}.$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial s'} = \frac{\sin P_2 OO''}{r_2}.$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial s'} = \frac{\sin P_n OO''}{r_n}.$$

et, à cause de l'équation (U'),

$$\lambda \frac{\partial \omega_1}{\partial s'} + \mu \frac{\partial \omega_2}{\partial s'} + \ldots + \varpi \frac{\partial \omega_n}{\partial s'} = 0;$$

donc

$$(u') \qquad \lambda \frac{\sin P_1 OO''}{r_1} + \mu \frac{\sin P_2 OO''}{r_2} + \ldots + \varpi \frac{\sin P_n OO''}{r_n} = 0.$$

On conclut aisément des équations (u) et (u') que les éléments ∂s et $\partial s'$ sont perpendiculaires entre eux; ce qu'il fallait démontrer.

Si les points P_1, P_2,..., P_n sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés et de rayon a, et que les quantités λ, μ, ν,... soient toutes égales, on pourra aisément déterminer l'équation des courbes du système (U').

Pour cela nous poserons

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} - \omega_1 = \psi_1,$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} - \omega_2 = \psi_2.$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} - \omega_n = \psi_n,$$

ce qui donne

$$n\frac{\pi}{2} - \pi - \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n.$$

On aura aussi, en désignant par r et ω les coordonnées polaires de notre courbe relatives au centre du polygone,

$$\operatorname{tang}\psi_1 = \frac{r\sin\omega}{a - r\cos\omega},$$

$$\operatorname{tang}\psi_2 = \frac{r\sin\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right)}{a - r\cos\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right)},$$

. . . . . .

$$\operatorname{tang}\psi_n = \frac{r\sin\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}{a - r\cos\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)},$$

ou [*]

$$\psi_1 = \frac{r}{a}\sin\omega - \frac{r^2}{2a^2}\sin 2\omega + \frac{r^3}{3a}\sin 3\omega + \ldots.$$

$$\psi_2 = \frac{r}{a}\sin\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) + \frac{r^2}{2a^2}\sin 2\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) + \frac{r^3}{3a}\sin 3\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots,$$

. . . . . .

$$\psi_n = \frac{r}{a}\sin\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + \frac{r}{2a^2}\sin 2\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$
$$+ \frac{r}{3a}\sin 3\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + \ldots;$$

ajoutant ces équations, et se rappelant que la somme

$$\sin k\omega + \ldots + \sin k\left[\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$$

est égale à $n\sin k\omega$ ou à zéro suivant que k est ou non divisible par n, on aura

$$\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n = \frac{r^n}{a^n}\sin n\omega + \frac{r^{2n}}{2a^{2n}}\sin 2n\omega + \frac{r^{3n}}{3a^{3n}}\sin 3n\omega + \ldots = \text{arc tang}\,\frac{r^n\sin n\omega}{a^n - r^n\cos n\omega}.$$

ou, en faisant $\operatorname{tang}(\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n) = \cot n\delta$.

$$(1) \qquad r^n\cos n(\omega - \delta) = a^n\cos n\delta,$$

ce qui s'accorde avec l'équation de M. Serret.

---

*] Voyez *Journal de l'École Polytechnique*, XIXe cahier, page 110.

La propriété qui a servi à former cette équation a été constatée depuis longtemps pour l'hyperbole équilatère, ou dans le cas particulier de $n = 2$.

Dans le Mémoire déjà cité, M. Serret a montré que les courbes représentées par l'équation (1) possèdent n sommets, déterminés par les valeurs de l'angle polaire, ϑ, $\frac{2\pi}{n} + \vartheta$,..., $\frac{2(n-1)\pi}{n} + \vartheta$, et si l'on augmente les rayons correspondants dans le rapport $\sqrt[n]{2}$ à 1, les extrémités seront des points analogues aux foyers des hyperboles équilatères (qui, du reste, font partie des systèmes de courbes que nous considérons). Ces points sont sur la circonférence du cercle dont le rayon ρ est déterminé par l'équation

$$\rho^n = 2a^n \cos n\vartheta,$$

et le produit des distances d'un point de la courbe aux foyers est égal à la puissance $n^{ième}$ du rayon correspondant de la courbe; enfin le lieu des foyers du système de courbes représentées par l'équation (1) est une courbe dont l'équation est

$$\rho^n = 2a^n \cos n\omega.$$

Nous allons maintenant démontrer quelques théorèmes analogues dans la géométrie sphérique.

Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les distances mesurées par des arcs de grands cercles, d'un point O aux sommets $P_1, P_2, \ldots, P_n$ d'un polygone quelconque formé aussi par des arcs de grands cercles, et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les angles OP_1P_2, OP_2P_3,..., $OP_{n-1}P_n$; il est facile de démontrer que les équations

$$\text{(V)} \qquad \left(\operatorname{tang}\frac{\rho_1}{2}\right)^{\lambda}\left(\operatorname{tang}\frac{\rho_2}{2}\right)^{\mu}\cdots\left(\operatorname{tang}\frac{\rho_n}{2}\right)^{\varpi} = \left(\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\right)^{\lambda+\mu+\ldots+\varpi},$$

$$\text{(V')} \qquad \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 + \ldots + \varpi\omega_n = (\lambda + \mu + \ldots + \varpi)\theta,$$

représentent deux systèmes de courbes orthogonales.

Si OO′ est un élément d'une courbe quelconque du système V, on trouve aisément

$$\lambda\frac{\cos P_1OO'}{\sin\rho_1} + \mu\frac{\cos P_2OO'}{\sin\rho_2} + \ldots + \varpi\frac{\sin P_nOO'}{\sin\rho_n} = 0.$$

et de même si OO″ est un élément d'une courbe quelconque du système V′, on a aussi

$$\lambda \frac{\cos P_1 OO''}{\sin \rho_1} + \mu \frac{\cos P_2 OO''}{\sin \rho_2} + \ldots + \varpi \frac{\cos P_n OO''}{\sin \rho_n} = 0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Si les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés et de rayon *sphérique* α, on aura facilement en coordonnées polaires ρ, ω l'équation des courbes du système V.

On trouve, en effet, assez facilement

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} \rho_1 = \frac{\tang^2 \frac{1}{2} \rho - 2 \tang \frac{1}{2} \alpha \tang \frac{1}{2} \rho \cos \omega + \tang^2 \frac{1}{2} \alpha}{\tang^2 \frac{1}{2} \rho \tang^2 \frac{1}{2} \alpha + 2 \tang \frac{1}{2} \alpha \tang \frac{1}{2} \rho \cos \omega + 1},$$

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} \rho_2 = \frac{\tang^2 \frac{1}{2} \rho - 2 \tang \frac{1}{2} \alpha \tang \frac{1}{2} \rho \cos \left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) + \tang^2 \frac{1}{2} \alpha}{\tang^2 \frac{1}{2} \rho \tang^2 \frac{1}{2} \alpha + 2 \tang \frac{1}{2} \alpha \tang \frac{1}{2} \rho \cos \left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) + 1},$$

. . . . . .

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} \rho_n = \frac{\tang^2 \frac{1}{2} \rho - 2 \tang \frac{1}{2} \alpha \tang \frac{1}{2} \rho \cos \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + \tang^2 \frac{1}{2} \alpha}{\tang^2 \frac{1}{2} \rho \tang^2 \frac{1}{2} \alpha + 2 \tang \frac{1}{2} \alpha \tang \frac{1}{2} \rho \cos \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + 1},$$

et, par la multiplication,

$$\frac{\tang^{2n} \frac{1}{2} \rho - 2 \tang^n \frac{1}{2} \alpha \tang^n \frac{1}{2} \rho \cos n\omega + \tang^{2n} \frac{1}{2} \alpha}{\tang^{2n} \frac{1}{2} \rho \tang^n \frac{1}{2} \alpha \mp 2 \tang^n \frac{1}{2} \rho \tang \frac{1}{2} \alpha \cos n\omega + 1} = \tang^{2n} \frac{\delta}{2},$$

le signe supérieur ou inférieur devant s'employer selon que n est pair ou impair.

On déduit aisément, pour l'équation différentielle du système V′,

$$\frac{d\rho}{\sin \rho d\omega} = \frac{\tang^n \frac{1}{2} \rho \left(1 \pm \tang^n \frac{1}{2} \alpha - \tang^n \frac{1}{2} \alpha \left(1 \pm \tang^n \frac{1}{2} \rho\right) \cos n\omega\right)}{\tang^n \frac{1}{2} \alpha \sin n\omega \left(1 \mp \tang^n \frac{1}{2} \rho\right)}.$$

L'intégration de cette équation s'effectue sans difficulté : δ désignant une constante, on trouve pour l'équation du système V′,

$$\frac{1 \pm \tang^n \frac{1}{2} \rho}{1 \pm \tang^n \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\tang^n \frac{1}{2} \rho}{\tang^n \frac{1}{2} \alpha} \cdot \frac{\cos n(\omega - \delta)}{\cos n\delta}.$$

Si $n = 2$, l'équation du système V devient

$$\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\rho - \frac{2\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\alpha(1-\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\beta)}{1-\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\beta}\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\rho \cos 2\omega + \frac{\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\alpha - \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\beta}{1-\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\beta} = 0,$$

équation qui présente de l'analogie avec celle des cassinoïdes homofocales. Si l'on considère la courbe représentée par cette équation comme la base d'un cône qui aurait pour sommet le centre de la sphère, cette surface sera du quatrième ordre; l'équation (2) pour $n=2$ deviendra

$$\frac{1}{\sin^2 \rho} = \frac{(1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)\cos^2(\omega-\theta) - (1-\sin^2\alpha\cos^2\theta)\sin^2(\omega-\theta)}{\sin^2\alpha\cos 2\theta},$$

et représente des hyperboles équilatères sphériques ayant même centre et un point commun.

Concluons donc que :

Si deux droites passent par un point, le lieu d'une troisième droite qui passe par le même point et fait les angles θ, θ' avec les deux premières, tel que le produit $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta' =$ *constante, sera un cône du quatrième ordre, et le système de cônes, dans lequel cette constante varie, sera coupé orthogonalement par un système de cônes du second ordre, ayant même sommet et une commune arête. Le lieu des lignes focales des cônes du second ordre sera un cône du quatrième ordre et fait partie du système des trajectoires orthogonales.*

Ce théorème paraît être analogue à un théorème donné par M. Lamé, et dont parle M. Serret dans le Mémoire si souvent cité.

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET ULTRA-ELLIPTIQUES;

PAR M. J.-A. SERRET.

I.

On sait depuis longtemps que les arcs de la lemniscate sont exprimables par des fonctions elliptiques de première espèce, de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et par suite qu'ils peuvent être ajoutés ou retranchés entre eux, multipliés ou divisés algébriquement, de la même manière que les arcs de cercle; mais la lemniscate est la seule courbe algébrique chez laquelle on ait jusqu'ici constaté cette singulière propriété.

Legendre, qui s'est beaucoup occupé de ce genre de questions, a formé l'équation d'une courbe algébrique du sixième degré, dont l'arc s'exprime par une fonction elliptique de première espèce, augmentée d'une quantité algébrique, qui, à la vérité, peut disparaître en prenant convenablement les extrémités de l'arc, mais qui, n'étant pas nulle en général, empêche la courbe d'offrir une représentation parfaite de la première transcendante elliptique. Enfin, dans ces derniers temps, j'ai démontré que l'arc de la *cassinoïde*, dont la lemniscate n'est qu'un cas particulier, se présente sous la forme d'une fonction *abélienne*, décomposable en une somme ou une différence de deux fonctions elliptiques complémentaires de première espèce, et même que cet arc est exprimable à l'aide d'une simple fonction elliptique, si l'une de ses extrémités est convenablement choisie, l'autre demeurant arbitraire. Mais la question était loin d'être résolue, la lemniscate restait toujours la

seule courbe algébrique connue dont les coordonnées rectangulaires x et y satisfissent à une équation de la forme

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dz^2}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4}.$$

Depuis la publication de mes premières recherches, deux géomètres étrangers, M. William Roberts, de Dublin, et M. Tortolini, de Rome, se sont occupés à diverses reprises de questions analogues; la lecture de leurs intéressants Mémoires m'a conduit à examiner de nouveau le problème de la représentation de la première transcendante, que j'avais abandonné depuis longtemps, et dont la solution générale, si elle était possible, ne me semblait pouvoir être due qu'au hasard.

La première idée des recherches nouvelles auxquelles je me suis livré, et que je publie aujourd'hui, m'a été suggérée par une propriété de la lemniscate, à laquelle je n'avais pas d'abord attaché une grande importance, et qui pourtant paraît être la seule susceptible d'une généralisation favorable. Cette propriété de la lemniscate consiste en ce que ses coordonnées rectangulaires sont exprimables en fonction rationnelle de l'amplitude de la fonction elliptique qui représente l'arc; on peut la vérifier à l'instant même, car l'équation

$$x^2 + y^2 - 2a^2 \sqrt{x^2 - y^2} = 0,$$

qui appartient à la lemniscate, est évidemment satisfaite en posant

$$x = a\sqrt{2}\,\frac{z + z^3}{1 + z^4}, \quad y = a\sqrt{2}\,\frac{z - z^3}{1 + z^4};$$

d'où l'on déduit aisément

$$\sqrt{dx^2 - dy^2} = 2a\frac{dz}{\sqrt{1 + z^4}}.$$

J'ai été ainsi naturellement conduit à chercher les différentes solutions que peut admettre l'équation indéterminée

$$dx^2 - dy^2 = Z dz^2,$$

en prenant pour x, y, Z des fonctions réelles et rationnelles de z.

On trouvera dans mon Mémoire la solution générale de ce problème, qui comprend en même temps et la représentation des fonctions ellip-

tiques et celle des fonctions ultra-elliptiques; toutefois, comme j'ai eu spécialement en vue les fonctions elliptiques de première espèce, je m'occuperai d'abord d'un cas simple, celui où Z est une fraction ayant pour numérateur un monôme $C^2 z^{2\mu}$ et pour dénominateur un polynôme P qui ne renferme pas de facteurs multiples, en sorte que l'équation à résoudre sera

$$dx^2 + dy^2 = C^2 \frac{z^{2\mu} dz}{P}.$$

Les solutions de cette équation une fois trouvées, on connaîtra en particulier, parmi les courbes algébriques dont les coordonnées rectangulaires sont des fonctions rationnelles de l'amplitude z, quelles sont celles dont l'arc s'exprime par une fonction elliptique de première espèce. Nous verrons que le nombre de ces courbes est illimité.

II.

Conformément à l'usage adopté par plusieurs géomètres, nous représentons par i l'imaginaire $\sqrt{-1}$, en sorte que l'équation qu'il s'agit de résoudre pourra s'écrire de la manière suivante :

$$(1) \qquad (dx + idy)(dx - idy) = C^2 \frac{z^{2\mu} dz}{P}.$$

et l'on voit de suite qu'elle n'admettra aucune solution si P renferme des facteurs réels, car toute valeur réelle de z qui rendrait infini le second membre de l'équation (1) rendrait nécessairement infinis les deux facteurs

$$dx + idy \quad \text{et} \quad dx - idy,$$

ce qui est impossible, puisque, par hypothèse, P n'a pas de facteurs multiples, et que x et y doivent être rationnels; si donc on désigne par p et ϖ deux polynômes *conjugués* dont le produit est P, l'équation (1) deviendra

$$\frac{dx + idy}{\left(\frac{Cz^{\mu}}{p}\right) dz} \cdot \frac{dx - idy}{\left(\frac{Cz^{\mu}}{\varpi}\right) dz} = 1.$$

ce qui montre que les deux fonctions rationnelles $\frac{dx+idy}{\frac{Cz^{\mu}}{p}dz}$ et $\frac{dx-idy}{\frac{Cz^{\mu}}{\varpi}dz}$ sont conjuguées et ont pour module l'unité; on aura donc nécessairement, en désignant par t et τ deux polynômes conjugués premiers entre eux, et par ω un angle réel,

$$dx+idy=Ce^{\omega i}\frac{t}{\tau}\frac{z^{\mu}dz}{p},$$

$$dx-idy=Ce^{-\omega i}\frac{\tau}{t}\frac{z^{\mu}dz}{\varpi}.$$

Chacune de ces équations est une conséquence de l'autre, car elle s'en déduit par le changement de i en $-i$; de la première on tire

$$x+iy=Ce^{\omega i}\int\frac{t}{\tau}\frac{z^{\mu}dz}{p}. \tag{2}$$

Cette équation fournira toutes les solutions de l'équation (1), et il ne s'agira plus que de déterminer les polynômes conjugués t et τ par la condition que l'intégrale

$$\int\frac{t}{\tau}\frac{z^{\mu}dz}{p}$$

soit algébrique.

Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que tous les facteurs de p se trouvent dans τ ou dans t; soit donc

$$p=p_1p_2 \quad \text{et} \quad \varpi=\varpi_1\varpi_2,$$

p_1 désignant le produit des facteurs de p qui se trouvent dans t, et p_2 le produit de ceux qui se trouvent dans τ; et de même, ϖ_1 et ϖ_2 étant les facteurs de ϖ qui se trouvent, le premier dans τ, et le second dans t, l'équation (2) pourra s'écrire de la manière suivante :

$$x+iy=Ce^{\omega i}\int\frac{t\varpi_2}{\tau p_2}\frac{z^{\mu}dz}{p_1\varpi}. \tag{3}$$

Or, $p_1\varpi_2$ est, comme p, un polynôme dont le module est $\sqrt{P}$; d'ailleurs ce polynôme est évidemment premier avec τp_2; si donc on met simple-

ment p au lieu de $p_1\varpi_2$, $\frac{t}{\tau}$ au lieu de $\frac{t\varpi}{\tau p}$, l'équation (3) ne sera autre que l'équation (2), où τ sera dès lors un polynôme premier à p.

Il suit de là que, sans altérer la généralité de la solution fournie par l'équation (2), on peut supposer le polynôme p premier avec τ. Cela posé, pour que l'intégrale du second membre de l'équation (2) soit algébrique, il faut que $\frac{t}{p}$ et par suite $\frac{\tau}{\varpi}$ soient entiers, et en outre que τ ne contienne aucun facteur linéaire simple.

Soient ρ un polynôme quelconque, δ le plus grand commun diviseur entre ce polynôme et sa dérivée, le polynôme $\frac{\rho}{\delta}$ ne différera de ρ qu'en ce que chaque facteur linéaire y entrera une fois de plus, et représentera, par conséquent, un polynôme quelconque n'ayant pas de facteurs simples; on pourra donc poser

$$\tau = \frac{\rho}{\delta}, \quad \text{et, par suite,} \quad t = \frac{r}{\delta},$$

r et δ représentant les polynômes conjugués de ρ et de δ.

D'après cela, l'équation (2) donnera

$$x + iy = Ce^{\omega} \int \frac{\delta r}{p\delta\rho} z^{\nu} dz, \tag{4}$$

où l'on ne devra prendre pour r et ρ que des polynômes conjugués respectivement divisibles par p et ϖ, et tels que, pour chaque racine c de l'équation

$$\rho = 0,$$

on ait

$$\left(\frac{z - c}{z - c'}\right)^{\nu} \frac{\delta r}{p\delta\rho} = 0.$$

III.

De ce qui précède, on peut déduire une propriété remarquable des fonctions rationnelles x et y susceptibles de satisfaire à l'équation

$$dx^2 + dy^2 = C^2 \frac{z^{\nu} dz}{p}$$

Si l'équation précédente est satisfaite en posant

$$x = \frac{U}{R}, \quad y = \frac{V}{R},$$

U, V, R désignant trois fonctions entières premières entre elles, la fonction

$$\frac{U^2 + V^2}{R}$$

sera entière.

Ce théorème résulte immédiatement de l'équation (4). Si, en effet, l'intégrale du second membre est algébrique, on aura

$$x - iy = \frac{s}{\rho},$$

s désignant un polynome premier à ρ, et de même

$$x - iy = \frac{\sigma}{r},$$

σ étant le polynôme conjugué de s.

Cela posé, si $\sqrt{R}$ et $\sqrt{S}$ désignent les modules des polynômes r et ρ, s et σ, on déduira des équations précédentes, par la multiplication,

$$x^2 + y^2 = \frac{S}{R},$$

et d'ailleurs les valeurs de x et y seront évidemment de la forme

$$x = \frac{U}{R}, \quad y = \frac{V}{R},$$

ce qui montre que l'on aura

$$S = \frac{U^2 + V^2}{R} = \text{entier}.$$

De ce théorème, qu'on pouvait facilement établir à priori à l'aide de simples considérations algébriques, résulte aussi un moyen très-simple de former l'équation (4); mais nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet. Nous nous bornerons à remarquer que si

l'équation proposée admet une solution rationnelle

$$x = \frac{U}{R}, \quad y = \frac{V}{R},$$

les fractions $\frac{U}{R}$ et $\frac{V}{R}$ seront irréductibles, car tout facteur commun à R et à l'une des fonctions U et V devrait nécessairement diviser l'autre, puisque la fonction

$$\frac{U^2 + V^2}{R}$$

est entière; or cela ne sera pas, car on pourra toujours supposer les polynômes U, V et R débarrassés de leurs facteurs communs.

IV.

Nous allons maintenant faire l'application de ce qui précède au cas des fonctions elliptiques de la première espèce; mais auparavant nous croyons utile de présenter quelques observations sur la transformation de l'intégrale elliptique $\int \frac{dz}{\sqrt{P}}$, dans laquelle P est un polynome du quatrième degré, dont les quatre facteurs linéaires sont imaginaires et conjugués deux à deux.

Soient a et α deux racines conjuguées de $P = 0$, b et β les deux autres, et posons

$$F = \int \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-\alpha)(z-b)(z-\beta)}};$$

la transformation *réelle* du *premier ordre* est toujours possible, bien que les quatre racines de P soient imaginaires. Soit donc

$$z = \frac{p + qu}{1 + u}, \quad \text{d'où} \quad dz = (q - p)\frac{du}{(1+u)^2},$$

et substituons ces valeurs dans F, on aura

$$F = \frac{(q-p)}{\sqrt{(q-a)(q-\alpha)(q-b)(q-\beta)}} \int \frac{du}{\sqrt{\left(u - \frac{a-p}{q-a}\right)\left(u - \frac{\alpha-p}{q-\alpha}\right)\left(u - \frac{b-p}{q-b}\right)\left(u - \frac{\beta-p}{q-\beta}\right)}}.$$

L'intégrale en u est de la même forme que la proposée, et l'on pourra, comme on sait, disposer des indéterminées p et q, de manière à faire disparaître les puissances impaires de u sous le radical; mais ceci peut se faire de deux manières, et c'est ce qu'il importe de bien remarquer : en d'autres termes, si l'on pose

$$P' = \left(u - \frac{a-p}{q-a}\right)\left(u - \frac{\alpha-p}{q-\alpha}\right)\left(u - \frac{b-p}{q-b}\right)\left(u - \frac{\beta-p}{q-\beta}\right),$$

on pourra toujours disposer des indéterminées p et q, de manière que deux racines conjuguées de $P' = 0$ soient respectivement égales et de signes contraires aux deux autres, ou bien que chaque racine soit égale et de signe contraire à sa conjuguée.

En premier lieu, pour que chaque racine de P' soit égale et de signe contraire à sa conjuguée, il faut et il suffit que

$$\frac{a-p}{q-a} + \frac{\alpha-p}{q-\alpha} = 0, \quad \frac{b-p}{q-b} + \frac{\beta-p}{q-\beta} = 0.$$

On en déduit

$$pq - \frac{a+\alpha}{2}(p+q) + a\alpha = 0, \quad pq - \frac{b+\beta}{2}(p+q) + b\beta = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{2}(p+q) = \frac{a\alpha - b\beta}{a+\alpha-b-\beta} \quad \text{et} \quad pq = \frac{a\alpha(b+\beta) - b\beta(a+\alpha)}{a+\alpha-b-\beta}.$$

On déduit de là très-aisément

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)(a-\beta)(\alpha-b)(\alpha-\beta)}{(a+\alpha-b-\beta)^2}.$$

et si l'on fait

$$a = m + in, \quad b = m' + in',$$
$$\alpha = m - in, \quad \beta = m' - in',$$

on aura

$$(p-q)^2 = \frac{[(m-m')^2 + (n-n')^2][(m-m')^2 + (n+n')^2]}{(m-m')^2}.$$

D'ailleurs

$$p + q = \frac{(m + n) - (m' + n')}{m - m'};$$

ce qui montre que les valeurs de p et q, que nous cherchons, seront toujours réelles.

A la vérité, ces valeurs de p et q seraient infinies, si l'on avait $m' = m$; mais, dans ce cas, en posant $z = u + m$, l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{P}}$ se transformerait en une autre de même forme $\int \frac{du}{\sqrt{P'}}$, et chaque racine de P' serait bien égale et de signe contraire à sa conjuguée.

En second lieu, je dis qu'on peut déterminer p et q de manière que deux racines conjuguées de P' soient respectivement égales et de signes contraires aux deux autres.

Pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{a - p}{q - a} + \frac{b - p}{q - b} = 0, \quad \frac{\alpha - p}{q - \alpha} + \frac{\beta - p}{q - \beta} = 0.$$

Comme nous ne pouvons prendre pour p et q que des valeurs réelles, l'une de ces équations sera toujours une conséquence de l'autre, car elle s'en déduira par le changement de i en $-i$.

De la première on tire, en posant $a = m + in$, $b = m' + in'$,

$$pq - \frac{(m + m') + (n + n')i}{2}(p + q) + (mm' - nn') + (mn' - m'n)i = 0.$$

Cette équation se décompose nécessairement dans les deux suivantes :

$$pq - \frac{m + m'}{2}(p + q) + (mm' - nn') = 0,$$

$$\frac{n + n'}{2}(p + q) - (mn' + m'n) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{p + q}{2} = \frac{mn' + m'n}{n + n'},$$

$$pq = \frac{n'(m + n') + n(m' + n')}{n + n'},$$

$$\left(\frac{p - q}{2}\right)^2 = -nn'\frac{(m - m')^2 + (n - n')^2}{(n + n')^2}.$$

Les valeurs de p et q, fournies par ces équations, seront réelles si l'on prend pour a et b deux racines de P non conjuguées et dont les parties imaginaires soient de signes contraires.

Si cependant $n + n'$ était nul, les valeurs précédentes de p et q seraient infinies; mais, dans ce cas, on obtiendrait l'intégrale transformée en mettant dans la proposée $z + \frac{m+m'}{2}$ au lieu de z.

Il résulte de ce qui précède que si x et y sont les coordonnées *rationnelles* d'un courbe dont l'arc soit

$$\int \frac{dz}{\sqrt{P}},$$

on pourra toujours supposer que chaque racine de $P = 0$ est égale et de signe contraire à sa conjuguée, ou bien que deux racines conjuguées sont égales et de signes contraires aux deux autres; car, s'il en était autrement, on ramènerait l'intégrale proposée à cette forme par une substitution réelle et rationnelle, et, en faisant la même substitution dans x et y, ces fonctions ne cesseraient pas d'être rationnelles.

C'est la seconde forme de l'intégrale que nous adopterons, et l'équation indéterminée qu'il s'agit de résoudre sera

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = C \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)}},$$

a et α étant deux constantes imaginaires conjuguées.

V.

Ainsi qu'on l'a vu au § II, on obtiendra toutes les solutions *réelles et rationnelles* de l'équation précédente au moyen de la formule

$$(5) \qquad x + iy = Ce^{\omega} \int \frac{\left(\frac{r}{p\delta}\right)}{\left(\frac{\rho}{\delta}\right)} dz,$$

où ρ désigne un polynôme divisible par ϖ et dont chaque racine c satisfait à la condition

$$(6) \qquad \mathcal{L} \frac{(z-c)\frac{r}{p\delta}}{(z-c)\frac{\rho}{\delta}} = 0.$$

En général, pour une forme déterminée des polynômes ρ et r, les conditions exprimées par l'équation (6) ne pourront subsister en même temps; mais il existe un cas très-étendu où elles pourront toujours être satisfaites, c'est celui où les polynômes ρ et r ne renfermeront que les facteurs linéaires des polynômes donnés ϖ et p. Ce cas est aussi le seul que nous considérerons dans ce Mémoire.

Soit posé

$$p = (z^2 - a^2)^n, \quad r = (z - a)^m (z + a)^n, \quad \delta = (z - a)^{m-1} (z + a)^{n-1}.$$

$$\varpi = (z^2 - \alpha^2), \quad \rho = (z - \alpha)^m (z + \alpha)^n, \quad \delta = (z - \alpha)^{m-1} (z + \alpha)^{n-1}.$$

l'équation (5) deviendra

$$(7) \qquad x + iy = Ce^{\omega} \int \frac{(z - a)^m (z + a)^n}{(z - \alpha)^m (z + \alpha)^n} dz;$$

si l'on fait, pour abréger,

$$\varphi(z) = \frac{(z - a)^m (z + a)^n}{(z + \alpha)^n}, \quad \psi(z) = \frac{(z - a)^m (z + a)^n}{(z - \alpha)^m},$$

on aura

$$(8) \left\{ \begin{aligned} &\frac{(z - a)^m (z + a)^n}{(z - \alpha)^m (z + \alpha)^n} \\ &= \frac{\varphi(\alpha)}{(z - \alpha)^m} + \frac{\varphi'(\alpha)}{1.(z - \alpha)^{m-1}} + \frac{\varphi''(\alpha)}{1.2.(z - \alpha)^{m-2}} + \ldots + \frac{\varphi^{m}(\alpha)}{1.2\ldots m(z - \alpha)} \\ &+ \frac{\psi(-\alpha)}{(z + \alpha)^n} + \frac{\psi'(-\alpha)}{1.(z + \alpha)^{n-1}} + \frac{\psi''(-\alpha)}{1.2.(z + \alpha)^{n-2}} + \ldots + \frac{\psi^{n}(-\alpha)}{1.2\ldots n(z + \alpha)} \end{aligned} \right.$$

Cela posé, pour que l'intégrale du second membre de l'équation (7) soit algébrique, il faut et il suffit que l'on ait

$$(9) \qquad \varphi^{m}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \psi^{n}(-\alpha) = 0;$$

mais l'une de ces équations est évidemment une conséquence de l'autre, car si l'on chasse les dénominateurs dans l'équation (8), le premier membre sera un polynôme du degré $m + n$, et le second un polynôme du degré $m + n - 1$; le coefficient de z^{m+n-1} sera donc nul de m-

même, et l'on aura

$$\frac{\varphi^m(\alpha)}{1.2\ldots m} + \frac{\psi^n(-\alpha)}{1.2\ldots n} = 0.$$

Si donc l'une des équations (9) est satisfaite, l'autre le sera nécessairement aussi.

Les équations (9) établissent ainsi entre a, α et les nombres entiers m et n, une relation unique

$$f(a, \alpha) = 0. \tag{10}$$

D'ailleurs on peut donner au produit $a\alpha$ telle valeur que l'on voudra, car cela revient à changer z en λz dans l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{P}}$; l'équation (10) déterminera donc entièrement les quantités a et α en fonction des nombres m et n, et il faudra, en outre, que ces valeurs de a et α satisfassent à l'équation

$$f(\alpha, a) = 0,$$

que l'on obtient en changeant dans l'équation (10) les quantités a et α l'une en l'autre; or je dis que cette condition sera toujours remplie, à cause que l'équation (10) est symétrique par rapport aux quantités a et α.

VI.

Nous examinerons d'abord un cas simple, celui de $m = 1$, n restant quelconque, et nous donnerons en même temps les valeurs des modules des fonctions elliptiques comprises dans ce cas particulier.

On a, dans ce cas,

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)(z+a)^n}{(z+\alpha)^{n+1}},$$

d'où

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z-a} + \frac{n}{z+a} - \frac{n+1}{z+\alpha},$$

et l'équation

$$\varphi'(\alpha) = 0$$

devient, dans ce cas,

$$(11) \qquad \frac{\alpha^2 + a^2}{a\alpha} = 2\,\frac{n-1}{n+1};$$

elle ne change pas, comme on voit, en changeant l'une en l'autre les quantités a et α.

Si donc on prend pour a et α des quantités satisfaisant à l'équation (11), l'arc de la courbe algébrique définie par l'équation

$$x + iy = Ce^{\omega i} \int \frac{(z-a)^2 (z+a)^n}{(z-\alpha)^2 (z+\alpha)^n}\, dz$$

sera représenté par l'intégrale elliptique

$$C \int \frac{dz}{\sqrt{(z-a)^2 (z-\alpha)^2}}.$$

dont le module k (en ramenant l'intégrale à la forme $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$) a pour valeur

$$k = \sqrt{\frac{n}{n+1}};$$

la lemniscate, comme chacun sait, correspond au cas le plus simple de $n = 1$.

Considérons encore le cas particulier de $m = 2$.

On a

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)^2 (z+a)^n}{(z+\alpha)^n},$$

d'où

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{2}{z-a} + \frac{n}{z+a} - \frac{n+1}{z+\alpha},$$

et

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} = \left(\frac{2}{z-a} + \frac{n}{z+a} - \frac{n+1}{z+\alpha}\right)^2 - \left(\frac{2}{(z-a)^2} + \frac{n}{(z+a)^2} - \frac{n+1}{(z+\alpha)^2}\right).$$

D'après cela, l'équation

$$\varphi''(\alpha) = 0$$

sera

$$\left(\frac{2}{\alpha - a} + \frac{n}{\alpha + a} - \frac{n+1}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{2}{\alpha - a^2} + \frac{n}{(\alpha + a)^2} - \frac{n-1}{4\alpha^2}\right) = 0,$$

ou

$$(n-1)(n+2)\left(\frac{\alpha^2 - a^2}{a\alpha}\right)^2 - 4(n+1)(n-2)\frac{\alpha^2 + a^2}{a\alpha} - 4(n^2 - 5n - 2) = 0,$$

et, par suite,

$$(12) \qquad \frac{a^2 + \alpha^2}{a\alpha} = \frac{2(n+1)(n-2) \pm 4\sqrt{2n(n+1)}}{(n-1)(n+2)}.$$

en sorte que si a et α sont des imaginaires conjuguées, satisfaisant à l'équation (12), l'arc de la courbe algébrique définie par l'équation

$$x + iy = Ce^{\omega} \int \frac{(z-a)^n (z+a)^n}{(z-\alpha)^{n+1}(z+\alpha)^{n+1}} dz$$

sera représenté par l'intégrale elliptique

$$C \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)}}.$$

Les deux quantités a et α sont entièrement déterminées par l'équation (12); car, ainsi que je l'ai dit précédemment, on peut supposer leur produit égal à 1; il est aisé de voir que les deux valeurs du second membre de l'équation (12) sont toujours plus petites que 2, excepté dans le cas de $n = 1$, et, par conséquent, les quantités a et α déterminées par cette équation seront toujours imaginaires, comme cela doit être.

Dans le cas de $n = 1$, l'une des valeurs de $\frac{a^2 + \alpha^2}{a\alpha}$ est -2; elle doit être rejetée, car elle donnerait $a + \alpha = 0$; mais ce cas a déjà été traité précédemment, et l'on a vu que si l'un des exposants m et n est l'unité, il n'existe qu'une valeur unique pour le module de la fonction elliptique correspondante.

Quant au module k de la fonction elliptique, dont nous nous occupons en ce moment, on aura pour la valeur de son carré

$$k^2 = \frac{n(n-1) \pm \sqrt{2n(n+1)}}{(n+1)(n+2)}.$$

VII.

Nous venons de voir, au paragraphe précédent, que dans le cas particulier où l'un des nombres m et n est égal à 1 ou à 2, les équations équivalentes

$$\varphi^m(\alpha) = 0, \quad \psi^n(\alpha) = 0,$$

établissent entre a et α une relation unique où ces quantités entrent symétriquement, et de cette circonstance seulement est résultée la possibilité de former deux classes de modules pour lesquels les fonctions elliptiques de la première espèce sont *identiques* aux arcs de courbes algébriques à *coordonnées rationnelles*.

Cette propriété dont jouit l'équation

$$f(a, \alpha) = 0,$$

d'être symétrique par rapport aux quantités a et α, subsiste pour toutes les valeurs possibles des entiers m et n, en sorte que si l'on pose

$$\frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha} = \zeta,$$

elle prendra la forme

$$\Pi(\zeta) = 0,$$

et sera du degré θ en ζ, θ désignant le plus petit des nombres m et n.

L'équation en ζ a pour racines les carrés des modules des fonctions elliptiques correspondantes aux valeurs données de m et n; mais si le plus petit de ces nombres surpasse 2, l'équation sera au moins du troisième degré et ne pourra, en général, être résolue.

Quoi qu'il en soit, nous aurons rigoureusement établi qu'il existe une infinité de classes de modules pour lesquels les fonctions de première espèce correspondantes sont représentées par des arcs de courbes algébriques analogues à la lemniscate.

VIII.

Il est indifférent, pour former l'équation

$$f(a, \alpha) = 0,$$

de se servir de l'une ou de l'autre des équations (9); nous supposerons que m soit inférieur ou au plus égal à n, et nous prendrons la premiere des équations (9)

$$\varphi^m(\alpha) = 0.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$\chi(z) = (z-a)^n (z+a)^n,$$

on aura

$$\varphi(z) = \chi(z) \cdot (z+\alpha)^{-n-1},$$

d'où, en différentiant m fois, et représentant, suivant l'usage, par

$$\Gamma(\theta)$$

le produit des $\theta - 1$ premiers nombres entiers,

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)}(z+\alpha)^{n+m+1}\varphi^m(z) = \sum_{p=0}^{p=m}(-1)^{m-p}\frac{\Gamma(n+m-p+1)}{\Gamma(m-p+1)\Gamma(p+1)}(\chi^p(z))(z+\alpha)^p.$$

Comme le nombre m n'est pas supérieur à n, les quantités

$$\chi(\alpha), \quad \chi'(\alpha), \ldots, \quad \chi^m(\alpha)$$

seront toutes divisibles par $(\alpha+a)^{n-m}$, qui ne peut être nul, en sorte que l'équation

$$\varphi^m(\alpha) = 0$$

deviendra

$$(13) \qquad 0 = \sum_{p=0}^{p=m}(-1)^{m-p}\frac{\Gamma(n+m-p+1)}{\Gamma(m-p+1)\Gamma(p+1)}(2\alpha)^p\frac{\chi^p(\alpha)}{(\alpha+a)^{n-m}};$$

on a d'ailleurs

$$\chi(\alpha) = (\alpha-a)^m(\alpha+a)^n,$$

et, en développant d'après les puissances de $\alpha + a$,

$$\chi(\alpha) = \Gamma(m+1)\sum_{q=0}^{q=m}(-1)^q\frac{(2a)^q(\alpha+a)^{n+m-q}}{\Gamma(m-q+1)\Gamma(q+1)};$$

différentiant p fois par rapport à α, on aura

$$\chi^p(\alpha) = \Gamma(m+1)\sum_{q=0}^{q=m}(-1)^q\frac{\Gamma(n+m-q+1)}{\Gamma(m-q+1)\Gamma(q+1)\Gamma(n+m-p-q+1)}(2a)^q(\alpha+a)^{n-m-p-q}.$$

en sorte que l'équation (13) deviendra

$$(14)\quad 0 = \sum_{p=0}^{p=m} \sum_{q=0}^{q=m} (-1)^{p+q} \frac{\Gamma(n+m-p+1)\,\Gamma(n+m-q+1)}{\Gamma(m-p+1)\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(m-q+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(n-m-p-q+1)} \cdot (2\alpha)^p (2a)^q (\alpha-a)^{n-p-q}.$$

Telle est l'équation à laquelle doivent satisfaire les quantités a et α, dans le cas le plus général que nous ayons considéré; elle est évidemment symétrique et homogène par rapport à ces quantités, en sorte que si l'on pose

$$\frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha} = \zeta,$$

elle prendra la forme

$$\Pi(\zeta) = 0,$$

et sera du degré m en ζ, ainsi que nous l'avions annoncé.

IX.

Nous allons maintenant nous occuper plus particulièrement des courbes appartenant aux deux premières classes que nous avons distinguées plus haut et qui correspondent aux cas les plus simples de $m = 1$ et $m = 2$, n restant quelconque; mais, auparavant, il convient d'établir un théorème important qui nous sera d'une grande utilité.

Ainsi qu'on l'a vu au § II, on satisfera à l'équation

$$dx^2 + dy^2 = C^2 e^{2\int \frac{dz}{P}} \cdot$$

où P est un polynôme qui ne renferme ni facteurs réels, ni facteurs multiples, en posant

$$x - iy = Ce^{\int \frac{dz}{P}} \int \frac{\partial z}{P\rho'} z^{-1} dz;$$

si l'intégrale du second membre est algébrique, elle sera de la forme $\frac{s}{\rho}$, s étant un polynôme premier à ρ, et l'on aura

$$\rho s' - s\rho' = Ce^{\int \frac{dz}{P}} z^{-1} \partial \frac{z}{P\rho},$$

ρ' et s' désignant, suivant l'usage, les dérivées des polynômes ρ et s.

Cette équation, en désignant par ε une constante quelconque, peut s'écrire de la manière suivante

$$\rho(s' - \varepsilon\rho') - \rho'(s - \varepsilon\rho) = Ce^{\omega t} z^{\mu} \delta \frac{r^2}{p^{\delta}}.$$

Cela posé, si $z - c$ désigne un facteur linéaire qui divise θ fois le polynôme $\frac{r}{p}$, et si l'on prend pour ε la valeur de $\frac{s}{\rho}$ correspondante à $z = c$, l'équation précédente montre que $s - \varepsilon\rho$ sera divisible $\delta - \theta$ fois par $z - c$; on aura donc

$$s - \varepsilon\rho = (z - c)^{\delta+2} s_1,$$

d'où

$$\frac{s}{\rho} \quad \text{ou} \quad x + iy = \frac{(z-c)^{\delta+2} s_1}{\rho} + \text{constante}.$$

Ce théorème nous permettra de former sans difficulté les équations des courbes appartenant aux deux premières classes.

X.

Ainsi qu'on l'a vu au § VI, si a et α désignent des quantités imaginaires conjuguées satisfaisant à l'équation

$$\frac{a^2 + \alpha^2}{a\alpha} = 2\frac{n-1}{n+1},$$

la courbe définie par l'équation

$$x + iy = Ce^{\omega t} \int \frac{(z-a)(z+a)^n}{(z-\alpha)(z+\alpha)^{n+1}} dz$$

est algébrique, et son arc est représenté par l'intégrale elliptique

$$C \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)}}.$$

Dans le cas que nous considérons en ce moment, le polynôme $\frac{r}{p}$ est divisible par $(z + a)^{n-1}$; donc, en vertu du théorème du § IX, le numérateur de $x + iy$ sera divisible par $(z + a)^{n+1}$, et comme ce numérateur ne peut être d'un degré supérieur à $n + 1$, on aura néces-

sairement un résultat de la forme

$$(15)\qquad x + iy = Ce^{\omega i}\frac{(z+a)^{n+1}}{(z-\alpha)(z+\alpha)^n} + \text{constante};$$

C et ω sont encore des constantes réelles, un peu différentes néanmoins de celles qu'on désignait tout à l'heure par les mêmes lettres. Telle est l'équation qui détermine les courbes de la première classe : le principe à l'aide duquel elle a été formée ne peut pas être appliqué dans le cas de $n = 1$ qui appartient à la lemniscate, à cause que, dans ce cas, le polynôme $\frac{r}{p}$ n'est plus divisible par $z + a$; toutefois, il est facile de s'assurer que l'équation (15) doit être conservée, car la courbe qu'elle représente pour $n = 1$ n'est autre que la lemniscate.

L'angle ω et la constante du second membre de l'équation (15) ne font que laisser indéterminées l'origine et la direction des axes coordonnés; en égalant à zéro ces quantités, et posant $C = 1$, on aurait pour les courbes de la première classe,

$$x + iy = \frac{(z+a)^{n+1}}{(z-\alpha)(z+\alpha)^n},$$

$$x - iy = \frac{(z+\alpha)^{n+1}}{(z-a)(z+a)^n};$$

d'où l'on déduit, par la multiplication,

$$x^2 + y^2 = \frac{(z+a)(z+\alpha)}{(z-a)(z-\alpha)}.$$

Si l'on fait $n = 1$, les quantités a et α seront données par les équations

$$a^2 + \alpha^2 = 0, \quad a\alpha = 1,$$

et si l'on détermine la constante de l'équation (15) par la condition que le numérateur de $x + iy$ ne soit que du premier degré, on trouve

$$x + iy = C\frac{z}{z-i} = C\frac{z+i}{z+1},$$

d'où

$$x = C\frac{z}{z+1}, \qquad y = C\frac{z}{z+1};$$

ce sont les équations de la lemniscate sous la forme la plus simple possible.

Si, en second lieu, on fait $n = 2$, on aura pour déterminer a et α,

$$a^2 + \alpha^2 = \frac{2}{3}, \quad a\alpha = 1,$$

et l'équation (15) donnera

$$x + iy = C\frac{z^3 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}z - \frac{1 - i\sqrt{2}}{9}}{\left(z - \frac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{3}}\right)^2\left(z + \frac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{3}}\right)}.$$

Cette équation appartient à une courbe du sixième degré, la plus simple de toutes celles de la première classe, après la lemniscate.

XI.

Pour obtenir sous forme finie les équations des courbes de la seconde classe, il faudra déterminer l'intégrale du second membre de l'équation

$$x + iy = Ce^{\omega t}\int \frac{(z - a)(z + a)^n}{(z - \alpha)(z - \alpha)^{n+1}}\,dz,$$

dans laquelle les quantités conjuguées a et α satisfont à l'équation connue précédemment écrite; cette opération ne présente aucune difficulté, car, en vertu du théorème du § IX, le numérateur de $x + iy$, pour une valeur convenable attribuée à la constante que renferme l'intégrale, sera divisible par $(z+a)^{n+1}$, et comme ce numérateur ne saurait être d'un degré supérieur à $n+2$, on aura un résultat de la forme

$$(16) \qquad x + iy = Ce^{\omega t}\frac{(z - b)(z + a)^{n+1}}{(z - \alpha)(z + \alpha)^n} + \text{constante},$$

en désignant par b une quantité que nous allons aisément déterminer.

Pour cela, nous allons différentier $x + iy$, et nous exprimerons que cette différentielle est nulle pour $z = a$; on trouve, en opérant ainsi,

$$\frac{1}{a - b} + \frac{n + 1}{2a} - \frac{2}{a - \alpha} - \frac{n}{a + \alpha} = 0,$$

d'où

$$(17) \qquad b = a\frac{(n + 1)a^2 + (n + 3)\alpha^2 - 2(n - 2)a\alpha}{(n - 1)\alpha^2 + (n + 3)a^2 - 2(n - 2)a\alpha}.$$

L'équation (16), dans laquelle b se trouve déterminé par l'équation (17), représentera les courbes de la seconde classe.

Si l'on fait $n = 2$, les quantités a et α seront déterminées par les équations

$$a^2 + \alpha^2 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad a\alpha = 1,$$

d'où

$$a^2 = \frac{1 + i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \alpha^2 = \frac{1 - i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

et l'équation (16), dans laquelle on déterminera la constante du second membre par la condition que le numérateur de $x + iy$ ne soit que du troisième degré, donnera

$$x + iy = Ce^{i\omega} \frac{z - \frac{5 - i\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} z}{\left(z^2 - \frac{1 - i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Cette équation détermine la plus simple des courbes de la seconde classe; faisant $\omega = 0$, on en déduit sans difficulté

$$x^2 + y^2 = C^2 \frac{z^2\left(z^2 - \frac{10 z}{3\sqrt{3}} + 1\right)}{\left(z^2 - \frac{2z^2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2},$$

et, pour les valeurs de ses coordonnées rectangulaires,

$$x = C \frac{z - \frac{11}{3\sqrt{3}} z - \frac{11}{9} z^2 + \frac{1}{9\sqrt{3}} z^3}{\left(z^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} z^2 + 1\right)^2},$$

$$y = C \frac{\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} z - \frac{14\sqrt{2}}{9} z^2 + \frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} z^3}{\left(z^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} z^2 + 1\right)^2}.$$

L'arc de la courbe définie par les équations précédentes a pour valeur

$$C\int\frac{dz}{\sqrt{z^4-\frac{2}{\sqrt{3}}z^2+1}},$$

où le radical $\sqrt{3}$ doit être pris avec le même signe que dans les valeurs des coordonnées x et y.

Dans ce cas remarquable, en prenant successivement le radical $\sqrt{3}$ avec les deux signes, on aura deux courbes dont les arcs sont identiques aux deux fonctions complémentaires dont les modules ont pour valeurs

$$k^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad k'^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Les deux courbes dont il est ici question ont pour centre commun l'origine des coordonnées. Elles se composent de deux boucles fermées qui se réunissent au centre comme dans la lemniscate. L'angle formé par les deux tangentes issues du centre commun a pour tangente $11\sqrt{2}$, ce qui donne, pour la valeur de cet angle, 86° 19′ 19″ de la division sexagésimale; cet angle est, comme on sait, de 90 degrés dans la lemniscate.

XII.

Nous ne nous occuperons pas, dans ce Mémoire, des propriétés géométriques des courbes remarquables dont il vient d'être fait mention; l'étude de ces propriétés sera l'objet d'un autre travail. Pour le moment, notre but est atteint, non que nous pensions avoir donné la solution la plus générale possible du problème de la représentation de la première transcendante elliptique; mais si nous avons laissé bien des choses à faire après nous sur cette matière, au moins croyons-nous avoir avancé la question, en prouvant, comme on l'a vu dans ce Mémoire, que le nombre des courbes *elliptiques* est illimité, et qu'auprès du cercle et de la lemniscate viennent se placer une série infinie

de courbes algébriques inconnues jusqu'aujourd'hui, et qui jouissent, comme celles-ci, de la propriété que leurs arcs peuvent être multipliés et divisés *algébriquement*.

XIII.

Nous ferons maintenant une remarque importante sur la décomposition que nous avons adoptée du polynôme

$$P = (z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2),$$

en deux facteurs conjugués, car cette décomposition était la seule qui pût conduire à des résultats nouveaux; cette circonstance mérite d'être expliquée avec quelques détails.

Si l'on pose

$$p = (z - a)(z + \alpha), \qquad \pi = (z - \alpha)(z + a),$$

$$r = (z - a)^m (z + \alpha)^n, \qquad \rho = (z - \alpha)^m (z + a)^n,$$

$$s = (z - a)^{m-1}(z + \alpha)^{n-1}, \qquad \sigma = (z - \alpha)^{m-1}(z + a)^{n-1},$$

l'équation

$$x + iy = Ce^{\omega i} \int \frac{\sigma r}{p \pi \rho^2} dz$$

devient

$$x + iy = Ce^{\omega i} \int \frac{(z - a)^m (z + \alpha)^n}{(z - \alpha)^{m+1} (z + a)^{n+1}} dz,$$

et l'intégrale du second membre sera algébrique si, en posant

$$\varphi(z) = \frac{(z - a)^m (z + \alpha)^n}{(z + a)^{n+1} (z - \alpha)^{m+1}},$$

on a identiquement

$$\varphi^m(\alpha) = 0.$$

De même que précédemment, cette équation est homogène et symétrique par rapport aux quantités a et α, et elle est du degré m en $\frac{a + \alpha^2}{2a\alpha}$, si toutefois m n'est pas supérieur à n, ce qu'on peut toujours

supposer; mais les valeurs de $\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha}$, tirées de cette équation, sont supérieures à l'unité, en sorte qu'on aura, pour déterminer a et α, deux équations de la forme

$$\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha} = \zeta > 1 \quad \text{et} \quad a\alpha = 1.$$

Les valeurs de a et α, déterminées de cette manière, seront réelles et inégales, et ne pourront ainsi convenir, car $x + iy$ ne se changera pas en $x - iy$ par le changement des quantités a et α l'une en l'autre.

Dans le cas le plus simple de $m = 1$, on aurait

$$x + iy = Ce^{\omega t} \int \frac{(z-a)(z+\alpha)^n}{(z-\alpha)^2(z+a)^{n+1}}\, dz,$$

et l'équation

$$\varphi'(\alpha) = 0$$

donnerait

$$\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha} = \frac{n+2}{n}.$$

Dans le cas de $m = 2$, on aurait

$$x + iy = Ce^{\omega t} \int \frac{(z-a)^2(z+\alpha)^n}{(z-\alpha)^3(z+a)^{n+1}}\, dz,$$

et l'équation

$$\varphi''(\alpha) = 0$$

donnerait aisément

$$n(n-1)\left(\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha}\right)^2 - 2n(n+3)\left(\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha}\right) + (n^2+7n+8) = 0,$$

d'où

$$\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha} = \frac{n(n+3) \pm 2\sqrt{2n(n+1)}}{n(n-1)},$$

et il est facile de s'assurer que ces deux valeurs seront toujours plus grandes que l'unité, n étant un nombre entier et positif.

XIV.

Dans ce qui précède, nous avions principalement pour but la représentation géométrique de la première transcendante elliptique; aussi nous nous sommes borné à considérer l'équation

$$dx^2 + dy^2 = C^2 \frac{z^{2n}\,dz^2}{P},$$

dans laquelle P désigne un polynôme entier et rationnel premier avec sa dérivée; nous allons faire voir maintenant que la marche suivie au § II s'applique sans difficulté à l'équation générale

$$dx^2 + dy^2 = Z\,dz^2,$$

où Z désigne une fonction rationnelle quelconque de z.

Soient donc M et P deux fonctions entières premières entre elles, et considérons l'équation

$$dx^2 + dy^2 = \frac{M}{P}\,dz^2. \tag{18}$$

On voit d'abord que tout facteur réel qui se trouve dans M ou dans P doit y être un nombre pair de fois; car autrement, $\frac{M}{P}$ pourrait changer de signe, ce qui est absurde. On pourra donc poser

$$M = M_1^2 M_2, \quad P = P_1^2 P_2,$$

M_1^2, P_1^2 désignant les produits des facteurs réels de M et P, et de même. M_2 et P_2 désignant les produits des facteurs imaginaires; si, en outre, et d'après notre notation habituelle, on appelle m et μ deux polynômes conjugués dont le produit soit M_2, p et ϖ deux polynômes conjugués dont le produit soit P_2, on aura

$$M = M_1^2 m\mu, \quad P = P_1^2 p\varpi,$$

et l'équation (18) deviendra

$$dx^2 + dy^2 = \frac{M}{P}\frac{m\mu}{p\varpi}\,dz^2.$$

ou

$$\frac{dx + i\,dy}{\frac{M_1 m}{P_1 p}\,dz}\,\frac{dx - i\,dy}{\frac{M_1 \mu}{P_1 \varpi}\,dz} = 1;$$

on voit donc que les deux facteurs du premier membre sont deux fonctions rationnelles et conjuguées dont le module est 1, en sorte que si t et τ représentent deux polynômes conjugués premiers entre eux, et du reste indéterminés, on aura nécessairement

$$dx + i\,dy = \frac{t}{\tau}\,\frac{M_1 m}{P_1 p}\,dz,$$

$$dx - i\,dy = \frac{\tau}{t}\,\frac{M_1 \mu}{P_1 \varpi}\,dz,$$

et l'une de ces équations sera une conséquence de l'autre, car elle s'en déduira par le changement de i en $-i$. La première donnera

$$(19)\qquad x + iy = \int \frac{t}{\tau}\,\frac{M_1 m}{P_1 p}\,dz;$$

on peut, sans altérer la généralité de cette équation, supposer m et p premiers, l'un avec t, l'autre avec τ; en effet, désignons par m_1 le produit des facteurs de m qui se trouvent dans t, par m_2 le produit des facteurs de m premiers à t, en sorte qu'on ait

$$m = m_1 m_2.$$

Désignons de même par p_1 le produit des facteurs de p qui se trouvent dans τ, par p_2 le produit de tous les autres, et posons

$$p = p_1 p_2;$$

soient aussi μ_1, μ_2, ϖ_1, ϖ_2 les polynômes conjugués de m_1, m_2, p_1, p_2; l'équation (19) pourra s'écrire de la manière suivante :

$$x + iy = \int \frac{t m_1 \varpi_1}{\tau \mu_1 p_1}\,\frac{M_1 \mu_2 m}{P_1 \varpi_2 p}\,dz.$$

D'ailleurs, $\mu_1 m_2$ et $\varpi_1 p_2$ sont des polynômes respectivement de même module que m et p, et qui sont premiers l'un avec le numérateur, l'autre avec le dénominateur de la fraction $\frac{t m_1 \varpi_1}{\tau \mu_1 p_1}$ réduite à sa plus simple expression; si donc on met simplement m et p au lieu de $\mu_1 m_2$ et $\varpi_1 p_2$.

$\frac{t}{\tau}$ au lieu de $\frac{tm_1\varpi}{\tau\mu p}$, l'équation précédente ne sera autre que l'équation (19), où m et p seront dès lors premiers l'un avec t, l'autre avec τ.

Il est bien entendu, toutefois, que pour avoir toutes les solutions de l'équation (18), il sera nécessaire de considérer toutes les décompositions possibles des polynômes M et P en facteurs conjugués.

Cela posé, pour que l'intégrale de l'équation (19) soit algébrique, il faut évidemment que le polynôme P_1 ne renferme aucun facteur simple, non plus que le dénominateur de chacune des fractions

$$\frac{t}{p} \quad \text{et} \quad \frac{m}{\tau},$$

supposées réduites à leur plus simple expression.

Soit m_1 le plus grand commun diviseur entre m et τ, et posons

$$m = m_1 m_2, \quad \text{et, en même temps,} \quad \tau = \tau_1 \tau_2,$$

le dénominateur de la fraction $\frac{m}{\tau}$, réduite à sa plus simple expression, sera $\frac{\tau}{m}$ et ne devra renfermer aucun facteur simple; si donc ρ désigne un polynôme quelconque, δ le plus grand commun diviseur entre ce polynôme et sa dérivée, on devra poser

$$\tau = m_1 \frac{\rho}{\delta}, \quad \text{et, par suite,} \quad t = \mu_1 \frac{r^2}{\delta}.$$

Il faut, en outre, que le dénominateur de la fraction $\frac{t}{p}$ ou $\mu_1 \frac{r^2}{p\delta}$, supposée réduite à sa plus simple expression, ne renferme aucun facteur simple, et comme p est premier avec μ_1, il suffira de considérer la fraction $\frac{r^2}{p\delta}$.

Soit p_1 le plus grand commun diviseur à p et $\frac{r^2}{\delta}$, et posons

$$p = p_1 p_2, \quad \text{avec} \quad \varpi = \varpi_1 \varpi_2,$$

la fraction $\frac{r^2}{p\delta}$, réduite à sa plus simple expression, aura p_2 pour dénominateur; si donc e désigne un polynôme convenablement choisi, g le

plus grand commun diviseur entre ce polynôme et sa dérivée, on devra poser

$$p_2 = \frac{e^2}{g}, \quad \text{avec} \quad \varpi_2 = \frac{\varepsilon^2}{\gamma};$$

d'après cela, l'équation (19) deviendra

$$x + iy = \int \frac{\frac{r^2}{p_1 \partial}}{\frac{\rho^2}{\delta}} \frac{M_1 \mu_1 m_2}{P_1 \frac{e^2}{g}} dz.$$

$M_1 \mu_1 m_2$ est un polynôme dont le module est $\sqrt{M}$, je le désignerai simplement par m; de plus, comme P_1 ne renferme pas de facteurs simples, on pourra poser

$$P_1 = \frac{F^2}{G},$$

G désignant le plus grand commun diviseur du polynôme F et de sa dérivée, et l'on aura

$$(20) \qquad x + iy = \int \frac{\frac{r^2}{p_1 \partial}}{\frac{\rho^2}{\delta}} \frac{m\, dz}{\frac{F^2}{G} \cdot \frac{e^2}{g}}.$$

Telle est l'équation qui fera connaître les différentes solutions rationnelles de l'équation (18), en prenant pour r et ρ deux polynômes conjugués respectivement divisibles par p_1 et ϖ_1, premiers avec μ et m, et tels que, pour chaque racine c de l'équation

$$\rho = 0,$$

on ait

$$\mathcal{L} \frac{(z-c)\frac{r^2}{p_1 \partial}}{(z-c)\frac{\rho^2}{\delta}} \frac{m}{\frac{F^2}{G} \frac{e^2}{g}} = 0.$$

Quant aux différentes quantités que nous avons introduites, elles seront données par les équations

$$m\mu = M,$$

$$\frac{F^2}{G^2} \frac{e^2}{g} \frac{\varepsilon^2}{\gamma} p_1 \varpi_1 = P.$$

XV.

Si pour des valeurs déterminées des polynômes arbitraires r et z, l'intégrale de l'équation (20) est algébrique, la valeur de $x + iy$ sera une fraction rationnelle ayant pour dénominateur $F\rho$; on aura donc

$$x + iy = \frac{s}{F\rho},$$

s désignant un polynôme premier avec $F\rho$, et de même

$$x - iy = \frac{\sigma}{F\varepsilon}.$$

σ étant, comme d'habitude, le polynôme conjugué de s; si l'on désigne par $\sqrt{R}$, $\sqrt{S}$ et $\sqrt{E}$ les modules des polynômes r et z, s et σ, ρ et ε, on aura, en multipliant les équations précédentes,

$$x^2 + y^2 = \frac{S}{F^2ER}.$$

et si les polynômes conjugués ρ et ε sont premiers entre eux, les valeurs de x et y seront de la forme

$$x = \frac{U}{FER}, \quad y = \frac{V}{FER},$$

d'où

$$\frac{U^2 + V^2}{ER} = S = \text{entier}.$$

Si, en outre, F est une constante, c'est-à-dire si le dénominateur P du second membre de l'équation (18) ne renferme pas de facteurs réels, on aura ce théorème déjà démontré dans un cas plus particulier.

THÉORÈME. *Si l'on satisfait à l'équation*

$$dx^2 + dy^2 = \frac{M}{P}\,dz^2,$$

en posant

$$x = \frac{U}{R}, \quad y = \frac{V}{R},$$

on aura nécessairement

$$\frac{U^2 + V^2}{R} = \text{entier}.$$

Addition au Mémoire précédent;

PAR M. J.-A. SERRET.

Je me propose, dans cette Note, de former l'équation de la première des courbes de la seconde classe dont il a été question au § XI.

Ainsi qu'on l'a vu dans mon Mémoire, la courbe dont il s'agit pourra être définie par l'équation

$$(1)\qquad (x-\xi)+i(y-\upsilon)=Ce^{\omega i}\frac{(z-b)(z+a)}{(z-\alpha^2)(z+\alpha^2)},$$

où $\xi+i\upsilon$ désigne une constante arbitraire, que nous supposerons ici égale à $-Ce^{\omega i}$; on a d'ailleurs, pour déterminer a, α et b,

$$a^2+\alpha^2=\frac{4}{3}, \qquad a\alpha=1,$$

d'où

$$a^2=\frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \alpha^2=\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

et

$$b=a\frac{3a+5\alpha}{3\alpha^2+5a};$$

β désignant la quantité imaginaire conjuguée de b, on aura

$$\beta=\alpha\frac{3\alpha^2+5a}{3a^2+5\alpha},$$

et l'on trouve aisément

$$b^2=\frac{43-13i\sqrt{2}}{27\sqrt{3}},$$

$$\beta^2=\frac{43+13i\sqrt{2}}{27\sqrt{3}},$$

avec

$$b\beta=1.$$

De l'équation (1) on tire

$$(2)\qquad x + iy = Ce^{\omega i}\frac{(z-b)(z-a)(z^2-\alpha^2)(z+\alpha)}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^2}.$$

Il est facile de s'assurer que le numérateur du second membre ne renferme que des termes en z^3 et en z, et par conséquent, que $(x+iy)$ est une fonction *impaire* de z; l'équation (1) ne changera donc pas en changeant les signes des trois variables x, y et z, et l'on aura

$$(3)\qquad (x+\xi)+i(y+\upsilon) = -Ce^{\omega i}\frac{(z-b)(z-a)}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^2}.$$

Comme les équations (1) et (3) ne cessent pas d'avoir lieu en changeant i en $-i$, on aura finalement les quatre équations suivantes :

$$(x-\xi)+i(y-\upsilon) = Ce^{-\omega i}\frac{(z-b)(z+a)}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^2},$$

$$(x-\xi)-i(y-\upsilon) = Ce^{\omega i}\frac{(z-b)(z+a)}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^2},$$

$$(x+\xi)+i(y+\upsilon) = -Ce^{-\omega i}\frac{(z+b)(z-a)}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^2},$$

$$(x+\xi)-i(y+\upsilon) = -Ce^{\omega i}\frac{(z+b)(z-a)}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^2},$$

d'où l'on déduit, par la multiplication,

$$(x-\xi)^2+(y-\upsilon)^2 = C^2\frac{(z-b)(z+a)(z^2-\alpha^2)(z+\alpha)}{(z-\alpha)^4(z+\alpha)^4},$$

$$(x+\xi)^2+(y+\upsilon)^2 = C^2\frac{(z+b)(z-a)(z^2-\alpha^2)(z-\alpha)}{(z+\alpha)^4(z-\alpha)^4}.$$

Les premiers membres des deux équations précédentes représentent les carrés des distances d'un point de la courbe aux deux points fixes ξ, υ et $-\xi, -\upsilon$, dont la distance est égale à $2C$, en désignant par ρ et ρ' ces deux distances, on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho^2 = C^2\dfrac{(z-b)(z+a)(z^2-\alpha^2)(z+\alpha)}{(z-\alpha)^4(z+\alpha)^4}, \\[2ex] \rho'^2 = C^2\dfrac{(z+b)(z-a)(z^2-\alpha^2)(z-\alpha)}{(z+\alpha)^4(z-\alpha)^4}. \end{cases}$$

et l'on obtiendra l'équation de la courbe en ρ et ρ', par l'élimination de z entre ces deux équations; cette élimination, qui au premier abord semble devoir être fort pénible, s'exécute très-simplement en opérant de la manière suivante.

En multipliant entre elles les équations (4), on trouve

$$\rho^2\rho'^2 = C^4\left(\frac{z^2-b^2}{z^2-a^2}\right)\left(\frac{z^2-\beta^2}{z^2-\alpha^2}\right) = C^4\frac{z^4-(b^2+\beta^2)z^2+b^2\beta^2}{z^4-(a^2+\alpha^2)z^2+a^2\alpha^2},$$

et, en remplaçant a^2, α^2, b^2, β^2 par les valeurs écrites plus haut,

$$\rho^2\rho'^2 = C^4\frac{z^4-\frac{86}{27}z^2+1}{z^4-\frac{2}{\sqrt{3}}z^2+1}. \tag{5}$$

Cela posé, l'équation (2) peut s'écrire de la manière suivante :

$$x+iy = Ce^{\frac{3a-b}{z^2-a^2}z+\frac{\alpha}{z^2-\alpha^2}z-3\alpha b z},$$

et, en changeant partout i en $-i$,

$$x-iy = Ce^{-\frac{(3\alpha-\beta)z^2+(\alpha-3a\beta)z}{(z^2-\alpha^2)}}.$$

Des deux équations précédentes, on déduit par la multiplication, et en observant que $a\alpha = 1$, $b\beta = 1$,

$$x^2+y^2 = C^2e^{\frac{(10-3(a\beta+\alpha b))z^2-(6(a^2+\alpha^2)-9(ab+\alpha\beta))z+(10-3(a\beta+\alpha b))}{(z^2-a^2+\alpha^2)z^2+1)}};$$

on trouve d'ailleurs aisément

$$a^2+\alpha^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}; \qquad a\beta+\alpha b = \frac{14}{9}.$$

$$ab+\alpha\beta = \frac{10}{3\sqrt{3}}, \quad b\alpha^3+\beta a^3 = \frac{-8}{9\sqrt{3}};$$

on aura donc, en désignant par r le rayon vecteur $\sqrt{x^2+y^2}$,

$$r^2 = \frac{16}{3}C^2\frac{z^2\left(z^2-\frac{10}{3\sqrt{3}}z^2+1\right)}{\left(z^2-\frac{2}{\sqrt{3}}z^2+1\right)^2}.$$

D'ailleurs, le rayon r est une médiane du triangle dont ρ, ρ' et $2C$ sont les côtés; on aura donc

$$\rho^2 + \rho'^2 = 2r^2 + 2C^2,$$

et, par conséquent,

$$(6) \qquad \rho^2 + \rho'^2 - 2C^2 = \frac{32C^2}{3} \cdot \frac{z^2\left(z^4 - \frac{10}{3\sqrt{3}}z + 1\right)}{\left(z^4 - \frac{2}{\sqrt{3}}z^2 + 1\right)^2}.$$

C'est entre les équations (5) et (6) que nous allons maintenant éliminer z.

Si dans ces équations on pose

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = u,$$

elles deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \rho^2\rho'^2 &= C^4 \cdot \frac{u - \frac{86}{27\sqrt{3}}}{u - \frac{2}{\sqrt{3}}}, \\ 2r^2 \quad \text{ou} \quad \rho^2 + \rho'^2 - 2C^2 &= \frac{32C^2}{3} \cdot \frac{u - \frac{10}{3\sqrt{3}}}{\left(u - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}. \end{aligned}\right.$$

La quantité u entre au premier degré dans la première de ces équations, l'élimination de cette quantité s'effectue immédiatement, et l'on trouve

$$C^6 r^2 = 9\frac{3}{16}(C^4 - \rho^2\rho'^2)(9\rho^2\rho'^2 - C^4),$$

ou

$$(7) \qquad C^6(\rho^2 + \rho'^2 - 2C^2) = \frac{9\sqrt{3}}{8}(C^4 - \rho^2\rho'^2)(9\rho^2\rho'^2 - C^4),$$

ce qui est l'équation de la courbe cherchée entre ses deux coordonnées polaires ρ et ρ', la distance des deux pôles étant représentée par $2C$. On

sait que la lemniscate, en adoptant le même genre de coordonnées, est représentée par l'équation

$$\rho\rho' = C^2.$$

Pour avoir l'équation de la courbe en coordonnées polaires ordinaires, il suffira de remplacer, dans l'équation (7), ρ et ρ' par leurs valeurs tirées des équations

$$\rho^2 = r^2 - 2Cr\cos t + C^2,$$
$$\rho'^2 = r^2 + 2Cr\cos t + C^2,$$

d'où l'on déduit

$$\rho^2\rho'^2 = r^4 - 2C^2r^2\cos 2t + C^4;$$

on trouve ainsi

$$9r^2(r^2 - 2C^2\cos 2t)^2 + 8C^4(r^2 - 2C^2\cos 2t) + \frac{16C^6}{9\sqrt{3}} = 0.$$

Rapport sur ce Mémoire.

(Commissaires, MM. Lamé, Liouville rapporteur.)

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXI, page 281.)

« Le Mémoire de M. Serret, dont nous venons rendre compte à l'Académie, a pour objet la représentation géométrique des intégrales elliptiques et ultrà-elliptiques de Legendre, c'est-à-dire des intégrales dont l'élément est la racine carrée d'une fonction rationnelle. L'auteur se propose de représenter, du moins quand cela est possible, leur valeur indéfinie, par un arc de courbe algébrique, en se bornant, toutefois, au cas où les deux coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe sont exprimables rationnellement en fonction de la variable à laquelle se rapporte l'intégration. En d'autres termes, il cherche les

solutions réelles et rationnelles que peut avoir l'équation

$$dx^2 + dy^2 = Z dz^2,$$

où x, y et Z désignent des fonctions de z.

» Ce problème d'analyse indéterminée, très-intéressant en lui-même, indépendamment de ses applications, est résolu d'une manière simple dans le Mémoire de M. Serret. On arrive à une formule générale. Mais les calculs auxquels il faut ensuite se livrer, quand on veut compléter la solution pour une intégrale de forme donnée, étant longs et compliqués, M. Serret ne s'est occupé avec détail que des fonctions elliptiques de première espèce. Il suppose ces fonctions mises sous la forme

$$\int \frac{C dz}{\sqrt{z^2 - a^2}\sqrt{z^2 - \alpha^2}};$$

C étant une constante réelle, a et α deux constantes imaginaires conjuguées, et il n'a plus ainsi à traiter que l'équation

$$dx^2 + dy^2 = \frac{C dz^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)};$$

il se borne même à chercher les solutions pour lesquelles les expressions rationnelles de x et y ne contiennent, en dénominateur, aucun facteur différent de ceux du second membre, $z \pm a$, $z \pm \alpha$.

» Dans ce cas particulier, qui paraît du reste un des plus importants, et qui suffit pour montrer comment la méthode générale se prête aux applications, M. Serret prouve que les constantes imaginaires conjuguées a et α doivent satisfaire à une certaine condition nécessaire et suffisante; la valeur du rapport du carré de leur somme au quadruple de leur produit, qui compose le carré du module de la fonction elliptique ramenée à la forme ordinaire $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}$, ne peut pas être prise à volonté; elle doit être choisie parmi les racines de certaines équations algébriques dont le degré est arbitraire, et qui contiennent en outre, dans leurs coefficients, un nombre entier indéterminé, de manière que pour chaque degré le nombre des racines est infini. Quand le module satisfait à une de ces équations, on obtient aisément les deux quantités $x + y\sqrt{-1}$, $x - y\sqrt{-1}$, et, par suite,

x et y. On a de la sorte une infinité de fonctions elliptiques de première espèce, dont les valeurs s'expriment par un arc de courbe algébrique, ou, réciproquement, une infinité de courbes algébriques, dont les arcs s'expriment par des fonctions elliptiques de première espèce, et participent, dès lors, aux propriétés de ces fonctions relativement à l'addition, la soustraction, la multiplication et la division en parties égales.

» On peut distinguer les courbes dont nous parlons, en classes, d'après le degré de l'équation à laquelle satisfait le carré du module. L'exemple déjà connu de la lemniscate, dont les arcs s'expriment par la fonction elliptique de première espèce au module $\sqrt{\frac{1}{2}}$, se trouve bien élégamment généralisé dans la première classe où l'on rencontre tous les modules de la forme $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$. L'analyse de M. Serret suppose essentiellement n entier; mais nous nous sommes assurés que les formules auxquelles elle conduit finalement conservent leurs principales propriétés, lorsqu'on prend n fractionnaire. Ainsi les carrés des modules peuvent être des fractions proprement dites quelconques, sans que les courbes correspondantes cessent d'être algébriques, et d'offrir par leurs arcs une représentation des intégrales; seulement, les valeurs de x et y ne sont plus rationnelles en z.

» Le Mémoire de M. Serret renferme, comme on voit, des résultats utiles, remarquables. On savait depuis longtemps qu'il existe une courbe du sixième degré dont les arcs représentent, à une quantité algébrique près, les fonctions elliptiques de première espèce. On peut même, dans chaque cas, faire disparaître la quantité complémentaire algébrique, en prenant convenablement les extrémités de l'arc; mais, à cause des deux extrémités variables, il y a, en quelque sorte, deux arcs employés, et ce n'est pas par un élément $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, mais par la différence de deux éléments, que la différentielle de la fonction elliptique se trouve exprimée. Sous un certain point de vue, une telle représentation doit être regardée comme imparfaite. Nous avons, au contraire, un mode parfait de représentation dans la lemniscate; aussi les géomètres ont-ils étudié cette courbe avec beaucoup de soin. Or, M. Serret nous fait connaître une infinité de courbes algébriques dont les arcs jouissent aussi de la propriété d'avoir une différentielle identi-

quement égale à celle d'une fonction elliptique de première espèce; de là un nouveau champ ouvert aux spéculations géométriques. La réduction des quadratures aux rectifications, considérée en général, et la résolution des équations indéterminées dont elle dépend, appartiennent d'ailleurs à une branche étendue et difficile de l'analyse que l'on a jusqu'ici à peine effleurée. Le succès que M. Serret vient d'obtenir dans cette matière délicate donnera lieu, sans doute, à de nouvelles tentatives dont la science profitera. Nous pensons donc que le Mémoire de ce jeune géomètre mérite d'être approuvé par l'Académie et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*. »

Les conclusions de ce Rapport ont été adoptées.

Note de M. **Liouville**.

Les valeurs de x et y pour les courbes de la première classe sont fournies par la formule

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{c(z+a)^{n+1}}{(z-\alpha)(z+\alpha)^n},$$

où c est une constante que nous pouvons supposer réelle; de cette formule on déduit $x - y\sqrt{-1}$ en permutant entre elles dans le second membre les deux constantes imaginaires conjuguées

$$a = g + h\sqrt{-1}, \quad \alpha = g - h\sqrt{-1},$$

qui doivent au surplus satisfaire à l'équation de condition

$$\frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha} = \frac{n}{n+1}, \quad \text{ou} \quad g^2 = nh^2.$$

A cause de cette équation de condition, nous trouverons

$$dx + \sqrt{-1}\,dy = -\frac{c[a+\alpha+n(a-\alpha)](z+a)^n(z-a)\,dz}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^{n+1}}.$$

En permutant entre elles les imaginaires a et α, on aura ensuite

$$dx - \sqrt{-1}\, dy;$$

la multiplication donnera dès lors

$$dx^2 + dy^2 = \frac{C^2 dz^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)},$$

pourvu qu'on pose

$$C^2 = c^2 [(a + \alpha)^2 - n^2 (a - \alpha)^2] = 4n(n + 1) c^2 h^2.$$

Le théorème de M. Serret pour cette classe de courbes est donc vérifié. Mais nos calculs ne demandent pas que n soit entier; cet exposant doit seulement être rationnel, pour que la relation entre x et y demeure algébrique; on peut supposer $n =$ une fraction quelconque $\frac{p}{q}$; il suffit de prendre toujours $g = h\sqrt{n}$ (le signe du radical est indifférent). Voilà donc des fonctions elliptiques de première espèce, exprimables par des arcs de courbes algébriques, le module $k = \sqrt{\frac{p}{p+q}}$ de ces fonctions (ramenées à la forme ordinaire en posant $z = \sqrt{a\alpha}.\tang \frac{1}{2}\theta$) n'étant assujetti qu'à la seule condition d'avoir pour valeur de son carré une fraction proprement dite.

En introduisant des sinus et cosinus, on peut se débarrasser des radicaux que nos formules contiennent quand n est fractionnaire. Soit

$$z + g = \frac{h \cos\varphi}{\sin\varphi};$$

il nous viendra

$$z + a = \frac{h}{\sin\varphi}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

$$z + \alpha = \frac{h}{\sin\varphi}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

et aussi, puisque $g = h\sqrt{n}$,

$$z - \alpha = \frac{h(\cos\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Par conséquent

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{c[\cos(2n+1)\varphi + \sqrt{-1}\sin(2n+1)\varphi]}{\cos\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi},$$

d'où, en multipliant les deux termes de la fraction par l'expression imaginaire conjuguée au dénominateur, et décomposant l'équation en deux,

$$x = \frac{c[\cos 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\cos(2n+1)\varphi]}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi},$$

$$y = \frac{c[\sin 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\sin(2n+1)\varphi]}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi}.$$

Quant à la valeur de $dx^2 + dy^2$, elle est

$$\frac{C^2 dz^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)} = \frac{4n(n+1)c^2 d\varphi^2}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi};$$

cette valeur peut d'ailleurs se déduire directement des expressions de x et y, ou plutôt de $x \pm y\sqrt{-1}$, en fonction de φ, ce qui lève tous les scrupules que la présence des radicaux aurait pu faire naître.

L'élément ds de l'arc de courbe est donc égal à l'élément de fonction elliptique

$$\frac{2\sqrt{n(n+1)}\,.\,c\,d\varphi}{\sqrt{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi}}.$$

qu'on ramènera du reste, si l'on veut, à la forme ordinaire des fonctions de première espèce, en posant $\cot\varphi = \sqrt{n+1}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\zeta + \sqrt{n}$. Il a une relation simple avec le rayon vecteur $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; le produit de $x + y\sqrt{-1}$ par $x - y\sqrt{-1}$ donne, en effet,

$$r^2 = \frac{c}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi}.$$

et, par suite, $ds = 2\sqrt{n(n+1)}\,.\,r\,d\varphi$.

Je ne m'arrêterai pas à considérer les autres classes de courbes. Bornons-nous à dire que généralement dans les formules de M. Serret on peut supposer le nombre n fractionnaire.

Les représentations ainsi obtenues sont du genre de celles que nous trouvons dans la lemniscate. Il y a véritablement identité entre l'arc de chaque courbe et l'intégrale qui le représente. N'exprimer l'arc, par une intégrale donnée, qu'à une quantité algébrique près, offre beaucoup moins d'intérêt et n'a d'ailleurs aucune difficulté. Il suffit de se rappeler les formules

$$x = \psi'(\theta)\sin\theta + \psi''(\theta)\cos\theta,$$
$$y = \psi'(\theta)\cos\theta - \psi''(\theta)\sin\theta,$$
$$s = \psi(\theta) + \psi''(\theta),$$

par lesquelles on résout, comme on sait, l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Soit P une fonction algébrique de $\sin\theta$ et $\cos\theta$; pour que l'arc s appartienne à une courbe algébrique, et soit, à une quantité algébrique près, égal à la transcendante $\int P d\theta$, on n'aura qu'à prendre

$$\psi(\theta) = \int P d\theta, \quad \text{ou} \quad = \int P d\theta + Q,$$

Q désignant une fonction quelconque algébrique aussi. Mais d'une telle formule à celles que M. Serret nous donne, il y a loin, surtout quand il s'agit des fonctions elliptiques de première espèce. C'est principalement dans ce cas qu'il importait en effet d'arriver à des résultats débarrassés de termes complémentaires, afin de pouvoir transporter immédiatement, et dans toute leur élégance, aux arcs de courbes, les propriétés si curieuses de ces fonctions. M. Serret a su atteindre le but proposé, en résolvant en même temps une belle question d'analyse indéterminée; et l'on voit assez combien son travail mérite l'attention des géomètres.

MÉMOIRE

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES

RELATIVES AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Un savant géomètre, M. Gudermann, qui est l'auteur de plusieurs Mémoires intéressants publiés dans le Journal de M. Crelle, a considéré, parmi d'autres questions, la rectification de la sphéro-conique, courbe produite par l'intersection d'un cône du second ordre avec une sphère, dont le centre est le sommet du cône. Il résulte de l'analyse de ce savant, qu'on peut toujours représenter une fonction elliptique de troisième espèce par un arc de cette courbe, si le paramètre est circulaire; mais il ne paraît avoir donné aucune représentation de la fonction Π logarithmique, ce qu'il regarde comme une question un peu difficile. Voici ses paroles : « In applicationibus analyseos » ad geometriam, imprimis sphericam et dynamicam, rarissime inci- » dimus in integrale quod sit naturæ hyperbolicæ, frequentissime vero » incidimus in integralia quæ sunt cyclicæ. » (Journal de M. Crelle, tome XIV, page 169.) Quelques années après les recherches de M. Gudermann, j'ai démontré, dans ce Journal, qu'on pouvait représenter toute fonction elliptique (au moins avec l'aide des transformations modulaires dues à Lagrange et à M. Jacobi) par les arcs de la courbe tracée sur une surface sphérique par un cône du second ordre, dont le sommet est situé sur la surface, et dont un des axes principaux extérieurs passe par le centre. Je me propose, dans ce Mémoire, de réunir ces différents résultats, et de faire voir qu'on peut exprimer l'arc de l'intersection d'une sphère avec un cône du second ordre, dont un des axes principaux passe par le centre, quelle que soit la position de son

sommet, par les fonctions elliptiques. J'ajouterai aussi quelques généralisations des propriétés de la lemniscate, qui, dans les recherches de ce genre, mérite d'être étudiée avec attention.

Remarquons d'abord qu'il ne sera nécessaire de considérer que le cas où le sommet du cône est dans l'intérieur de la sphère, ce qui, sans diminuer la généralité du problème, simplifiera beaucoup la discussion de l'intégrale résultante.

Car, soit

$$Ax^2 + By^2 + (z - z')^2 = 0$$

l'équation d'un cône qui coupe la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

dont nous prenons le rayon pour unité; on verra sans difficulté que la courbe d'intersection de ces deux surfaces sera située aussi sur le cône dont l'équation est

$$A'x^2 + B'y^2 + \left(z - \frac{1}{z'}\right)^2 = 0,$$

ou

$$A' = \frac{A + z'^2 - 1}{z'^2}, \quad B' = \frac{B + z'^2 - 1}{z'^2}.$$

Cela posé, soient α et β les compléments des demi-angles principaux du cône, et z' la distance de son sommet au centre de la sphère; on aura pour l'équation de cette surface, en supposant que l'axe intérieur passe par le centre,

$$x^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + y^2 \operatorname{tang}^2 \beta - (z - z')^2 = 0;$$

substituant pour x, y, z leurs valeurs en ρ et ω, coordonnées polaires de la sphère, on trouve pour l'équation de l'intersection

$$a \qquad \frac{\sec^2 \alpha \cos^2 \omega + \sec^2 \beta \sin^2 \omega}{1 + z'^2} \sin^2 \rho + \frac{2z'}{1 + z'^2} \cos \rho = 1,$$

l'origine étant le point où l'axe des z perce la sphère, et l'angle ω étant compté à partir du grand cercle situé dans le plan des xz.

Si l'axe du cône qui passe par le centre est un des extérieurs, l'équa-

tion de cette surface sera

$$x^2 - y^2 \tang^2 \beta - (z - z')^2 \tang^2 \alpha = 0.$$

et celle de la courbe d'intersection

$$(b) \qquad \frac{\sec^2 \alpha - \sec^2 \beta \sin^2 \omega}{(1 + z'^2) \tang^2 \alpha} \sin^2 \rho + \frac{2z'}{1 + z'^2} \cos \rho = 1.$$

Les équations (a) et (b) sont toutes deux comprises dans la forme plus générale

$$(c) \qquad \Omega \sin^2 \rho + \sin 2\theta \cos \rho = 1.$$

où Ω désigne une fonction quelconque de ω, et θ une constante. Nous considérerons d'abord cette équation plus générale, à cause qu'il existe pour toutes les courbes qu'elle représente une formule de rectification très-simple.

La différentiation donne

$$\sin^2 \rho = \frac{4\Omega' - 4\Omega + \sin^2 2\theta}{\Omega'} \cdot \frac{d\rho}{d\omega},$$

en désignant par Ω' la fonction dérivée de Ω. Donc, s étant l'arc, si l'on substitue dans l'équation connue

$$ds = \sqrt{\sin^2 \rho + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}\, d\omega,$$

on aura

$$ds = \sqrt{\frac{4\Omega^2 + \Omega'^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta}{4\Omega' - 4\Omega + \sin^2 2\theta}} \sin \rho\, d\omega.$$

Mais on a, par l'équation (c),

$$\sin \rho = \frac{\cos \theta \sqrt{\Omega - \sin^2 \theta} \pm \sin \theta \sqrt{\Omega - \cos^2 \theta}}{2\Omega}$$

et identiquement,

$$4\Omega^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta = 4(\Omega - \sin^2 \theta)(\Omega - \cos^2 \theta);$$

donc

$$ds = \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{\Omega - \cos^2 \theta}} \pm \frac{\sin \theta}{\sqrt{\Omega - \sin^2 \theta}}\right) \frac{\sqrt{4\Omega^2 + \Omega'^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta}}{2\Omega}\, d\omega.$$

Ainsi, en désignant par s_1, s_2 les arcs que l'arc vecteur, correspondant à

l'angle polaire ω, détermine sur la courbe, on aura

$$d\left\{\begin{array}{l} s_1 + s_2 = \cos\theta \int \sqrt{\dfrac{4\Omega^2 + \Omega'^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta}{\Omega - \cos^2\theta}}\,\dfrac{d\omega}{\Omega}. \\ s_1 - s_2 = \sin\theta \int \sqrt{\dfrac{4\Omega^2 + \Omega'^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta}{\Omega - \sin^2\theta}}\,\dfrac{d\omega}{\Omega}. \end{array}\right.$$

Faisons maintenant l'application de ces formules aux courbes dont nous nous occupons. Si l'on met pour Ω sa valeur tirée de l'équation (a), on trouvera, à cause de $z' = \operatorname{tang}\theta$,

$$d(s_1 + s_2) = \frac{2}{\sqrt{1+z'^2}}\,\frac{1}{\sec^2\alpha\cos^2\omega + \sec^2\beta\sin^2\omega}\sqrt{\frac{p + q\operatorname{tang}^2\omega}{p' + q'\operatorname{tang}^2\omega}}\,d\omega.$$

en faisant, pour abréger,

$$p = \frac{(\sec^2\alpha - z'^2)\operatorname{tang}^2\alpha}{1+z'^2}, \qquad q = \frac{(\sec^2\beta - z'^2)\operatorname{tang}^2\beta}{1+z'^2},$$

$$p' = \frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{1+z'^2}, \qquad q' = \frac{\operatorname{tang}^2\beta}{1+z'^2}.$$

Pour la réduction de cette différentielle, il faudra prendre un angle φ, tel que

$$\sqrt{q}\operatorname{tang}\omega = \sqrt{p}\operatorname{cotang}\varphi,$$

ce qui donnera

$$d(s_1 + s_2) = -\frac{\sin 2\beta(\sec^2\beta - z'^2)}{\operatorname{tang}\alpha\sqrt{\sec^2\alpha - z'^2}}\,\frac{1}{1 + n\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

ou

$$n = -1 + \frac{\operatorname{tang}^2\beta - z'^2\sin^2\beta}{\operatorname{tang}^2\alpha - z'^2\sin^2\alpha}, \qquad k^2 = \frac{\operatorname{tang}^2\alpha - \operatorname{tang}^2\beta}{\sec^2\alpha - z'^2}.$$

Donc, si l'on compte s_1 et s_2 du grand cercle qui est perpendiculaire à celui duquel on a mesuré l'angle ω, on aura, en employant la notation des fonctions elliptiques,

$$s_1 + s_2 = \frac{\sin 2\beta(\sec^2\beta - z'^2)}{\operatorname{tang}\alpha\sqrt{\sec^2\alpha - z'^2}}\,\Pi(n, k, \varphi).$$

On trouvera de même, pour la différence des arcs,

$$d(s_1 - s_2) = \frac{2z'}{\sqrt{1+z'^2}}\,\frac{1}{\sec^2\alpha\cos^2\omega + \sec^2\beta\sin^2\omega}\sqrt{\frac{p + q\operatorname{tang}^2\omega}{p' + q'\operatorname{tang}^2\omega}}\,d\omega.$$

les quantités p, q ayant les mêmes valeurs que dans la somme, et p_1, q_1 étant respectivement égales à $\frac{\sec^2\alpha - z'^2}{1 + z'^2}$ et $\frac{\sec^2\beta - z'^2}{1 + z'^2}$. Substituant pour ω sa valeur en φ, et faisant les réductions convenables, on aura

$$s_1 - s_2 = \frac{2z' \sin\beta}{\operatorname{tang}\alpha}\sqrt{\frac{\sec^2\beta - z'^2}{\sec^2\alpha - z'^2}}\,\Pi(n, k_1, \varphi),$$

équation dans laquelle le paramètre n est le même que dans la somme, et où $k_1^2 = \frac{\operatorname{tang}^2\alpha - \operatorname{tang}^2\beta}{\operatorname{tang}^2\alpha}$.

Il est évident qu'en supposant $\alpha > \beta$, les quantités k et k_1 seront plus petites que l'unité. Donc, un grand cercle passant par les centres des branches opposées de la courbe déterminera sur elles deux arcs dont la somme et la différence seront exprimables par les fonctions elliptiques de troisième espèce, dont les amplitudes et paramètres sont les mêmes, mais dont les modules sont différents. Le paramètre sera toujours de l'espèce circulaire. Les périmètres entiers des deux branches seront respectivement

$$\frac{2\sin 2\beta\,\sqrt{\sec^2\beta - z'^2}}{\operatorname{tang}\alpha\,\sqrt{\sec^2\alpha - z'^2}}\,\Pi(n, k) + \frac{4z'\sin\beta}{\operatorname{tang}\alpha}\sqrt{\frac{\sec^2\beta - z'^2}{\sec^2\alpha - z'^2}}\,\Pi(n, k_1),$$

et

$$\frac{2\sin 2\beta\,\sqrt{\sec^2\beta - z'^2}}{\operatorname{tang}\alpha\,\sqrt{\sec^2\alpha - z'^2}}\,\Pi(n, k) - \frac{4z'\sin\beta}{\operatorname{tang}\alpha}\sqrt{\frac{\sec^2\beta - z'^2}{\sec^2\alpha - z'^2}}\,\Pi(n, k_1),$$

et, par conséquent, pourront s'exprimer par des fonctions de la première et de la seconde espèce. (*Traité des fonctions elliptiques*, tome I, chap. 23.)

Si l'on pose $z' = 0$, on retombe sur le cas de l'ellipse sphérique, dans lequel les deux arcs sont égaux; si le sommet du cône est sur la surface, $z' = 1$ et le second arc s_2 disparaîtra.

Passons au cas dans lequel un des axes extérieurs du cône est un diamètre de la sphère. Pour cela, il faut substituer dans les équations (d) la valeur de Ω tirée de l'équation (c); il en résultera, pour

la somme des arcs,

$$(2)\quad d\,(s_1 - s_2) = \frac{2\sqrt{1+z'^2}\,\tang\alpha}{\sec^2\alpha\cos^2\omega + (\tang^2\alpha - \tang^2\beta)\sin^2\omega}\sqrt{\frac{p+q\tang^2\omega}{p'+q'\tang^2\omega}}\,d\omega,$$

ou

$$p = \frac{1 - z'^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1+z'^2\sin^2\alpha}, \qquad q = \frac{(\tang^2\beta - (1-z'^2)\tang^2\alpha)\tang^2\beta}{(1+z'^2)\tang^2\alpha},$$

$$p' = \frac{1}{1+z'^2\tang^2\alpha}, \qquad q' = \frac{-\tang^2\beta}{(1+z'^2)\tang^2\alpha}.$$

Soit d'abord la quantité q positive, c'est-à-dire soit

$$\tang\beta > \sqrt{1-z'^2}\,\tang\alpha,$$

et faisons

$$\sqrt{q}\,\tang\omega = \sqrt{p}\,\tang t,$$

ce qui donne

$$d\,(s_1 - s_2) = \frac{2p\sqrt{1+z'^2}\sin^2\alpha}{\sqrt{qp'}}\,\frac{dt}{1+\left[\frac{p'\tang^2\alpha - \tang^2\beta}{q\sec^2\alpha} - 1\right]\sin^2 t}\sqrt{1 - \frac{qp'-pq'}{qp'}\sin^2 t}$$

Puisque la quantité $\frac{qp'-pq'}{qp'}$ est plus grande que l'unité, il faudra employer une seconde transformation, en introduisant un nouvel angle φ, tel que

$$\sqrt{qp'-pq'}\,\sin t = \sqrt{qp'}\,\sin\varphi:$$

alors, après quelques réductions, on obtient

$$s_1 - s_2 = \frac{2\tang\alpha\cos\beta\sqrt{1-z'^2\sin^2\alpha}}{\tang\beta}\,\Pi(n, k, \varphi),$$

ou

$$n = -1 + \sqrt{1 - z'^2\sin^2\alpha}\,\frac{\tang^2\alpha}{\tang^2\beta}.$$

et

$$k^2 = \sin^2\beta - (1 - z'^2)\tang^2\alpha\cos^2\beta.$$

On a aussi

$$(3)\quad d\,(s_1 - s_2) = \frac{2z\sqrt{1+z'^2}\tang^2\alpha}{\sec^2\alpha - \sec^2\beta\sin^2\omega}\sqrt{\frac{p+q\tang^2\omega}{p'+q'\tang^2\omega}}\,d\omega.$$

où p et q ont les mêmes valeurs que dans l'expression pour $s_1 + s_2$, et où

$$p_1 = \frac{1 - z'^2 \sin^2 \alpha}{(1 + z'^2 \sin^2 \alpha)^2}, \qquad q_1 = -\frac{\tang^2 \beta - (1 - z'^2) \tang^2 \alpha}{1 + z'^2 \tang^2 \alpha}.$$

Posant

$$\sqrt{p} \tang \omega = \sqrt{q} \tang t,$$

et ensuite

$$\sin t = \sin \beta \sin \psi,$$

on obtiendra enfin

$$s_1 - s_2 = 2z' \sin \alpha \cos \beta \sqrt{\frac{1 - z'^2 \sin^2 \alpha}{\tang^2 \beta - (1 - z'^2) \tang^2 \alpha}} \Pi\, n_1, \sin \beta, \psi$$

ou

$$n_1 = \frac{\tang^2 \alpha - \tang^2 \beta - z'^2 \sin^2 \alpha \tang^2 \alpha}{\tang^2 \beta - (1 - z'^2) \tang^2 \alpha}.$$

La courbe, dans le cas qu'on vient de considérer, est composée de deux branches fermées égales entre elles, et l'angle 2β est le supplément de celui que forment les tangentes menées du centre, comme on peut aisément s'en assurer en se rappelant l'équation (b). Les deux arcs s_1, s_2 sont situés sur la même branche, et on les détermine par un grand cercle, issu du centre, qui la coupe en deux points.

La plus grande valeur de ω, $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, répond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ce qui montre que le périmètre entier s'exprimera à l'aide de la fonction complète. La plus grande valeur de ψ est arc $\left(\cos = \sqrt{1 - z'^2} \frac{\tang \alpha}{\tang \beta}\right)$.

La fonction Π se réduira à une fonction de la première espèce, dans les expressions pour la somme et la différence des arcs, pourvu qu'on ait

$$z'^2 = \frac{\tang^2 \alpha - \tang^2 \beta}{\sin^2 \alpha \tang^2 \alpha}.$$

Lorsque cette relation existe, la courbe jouit d'une propriété remarquable, savoir, elle est le lieu géométrique du sommet d'un triangle sphérique, dont la base est donnée, et où le produit des sinus des demi-côtés est constant et plus petit que le carré du sinus de la quatrième partie de la base.

En effet, soit $2c$ la base d'un triangle sphérique, dont les côtés a, b satisfont à la condition dont il s'agit; on aura, λ étant un angle constant,

$$(1 - \cos a)(1 - \cos b) = (1 - \cos c)^2 \sin^2 \lambda.$$

Si l'on exprime $\cos a + \cos b$ et $\cos a \cos b$ par les coordonnées polaires dont l'origine est le milieu de la base, on obtient, pour l'équation du lieu cherché,

$$\frac{1 - \sin^2 c \sin^2 \omega}{2\cos c + 4\sin^2 \frac{1}{2} c \cos^2 \lambda} \sin^2 \rho - \frac{\cos c}{\cos c + 2\sin^2 \frac{1}{2} c \cos^2 \lambda} \cos \rho = 1.$$

La forme de cette équation coïncide évidemment avec celle de l'équation (b), et si on les identifie entre elles, on en déduira les équations suivantes :

$$1 - z'^2 \sin^2 \alpha = 2\cos c + 4\sin^2 \tfrac{1}{2} c \cos^2 \lambda,$$

$$1 + z'^2 \tang^2 \alpha \cos^2 \beta \sin^2 c = 2\cos c + 4\sin^2 \tfrac{1}{2} c \cos^2 \lambda.$$

$$z' + \frac{1}{z'} = \frac{2\cos c + 4\sin^2 \frac{1}{2} c \cos^2 \lambda}{\cos c}.$$

Des deux premières on tire

$$\cos \alpha = \sin c \cos \beta,$$

et de la première et de la troisième,

$$z' \sin^2 \alpha = \cos c;$$

donc, en éliminant c, il résulte

$$z'^2 = \frac{\tang^2 \alpha - \tang^2 \beta}{\sin \alpha \tang^2 \alpha},$$

ce qu'il fallait démontrer. On parvient ainsi, dans la géométrie de la sphère, à un résultat qui a une frappante analogie avec le beau théorème de M. Alfred Serret, sur la rectification de l'ellipse de Cassini, qu'il a publié dans le tome VIII de ce Journal, page 145.

Il suit de la propriété bien connue des fonctions F, que l'arc par lequel le demi-périmètre excède la somme des arcs s_1 et s_2, représente la fonction qui est complémentaire à celle qui exprime la valeur de $s_1 + s_2$.

La courbe générale (b) en comprend une autre qui jouit d'une propriété analogue, savoir, d'être le lieu géométrique du sommet d'un triangle sphérique dont la base est donnée, et où le produit des tangentes des demi-côtés est constant et plus petit que le carré de la quatrième partie de la base.

L'équation de ce lieu s'obtient sans aucune difficulté, et l'on peut l'identifier avec b, pourvu qu'il existe entre les angles principaux du cône et la distance de son sommet au centre de la sphère, la relation suivante :

$$z'^2 = \frac{\cos^2\zeta - \cos^2\alpha \sin^2\zeta}{\sin^2\alpha \cos^2\zeta}.$$

Substituant cette valeur de z' dans le module de la fonction par laquelle la somme des arcs s_1 et s_2 s'exprime, on pourra voir qu'il se réduit simplement à $\cos\beta$. Donc, dans le cas dont il s'agit, les fonctions elliptiques qui expriment respectivement la somme et la différence des arcs s_1 et s_2, auront des modules complémentaires : le plus grand appartient à la différence, et le plus petit à la somme ; ce qui est encore analogue à une autre partie du théorème de M. Serret.

Lorsque le cône est de révolution, on a $\alpha = \beta$, et le paramètre, dans les deux fonctions qui expriment la somme et la différence des arcs, devient égal au carré négatif du module; par conséquent, ces fonctions seront réductibles aux transcendantes de la seconde espèce.

L'expression pour la somme des arcs sera, dans ce cas,

$$s_1 + s_2 = 2\cos\beta \left[F(z'\sin\beta, \varphi) - \frac{z'\sin\zeta\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - z'^2\sin^2\zeta\sin^2\varphi}} \right],$$

et, pour la différence,

$$s_1 - s_2 = 2\sqrt{1 - z'^2\sin^2\beta} \left[E(\sin\beta, \varphi) - \frac{\sin\zeta\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\zeta\sin^2\varphi}} \right].$$

On déduit aisément, de la formule bien connue pour la comparaison des fonctions E, que l'arc par lequel le demi-paramètre excède la somme de s_1 et s_2 aura pour valeur $2\cos\beta E(z'\sin\beta, \varphi_1)$, φ_1 étant donné en φ par la relation

$$(1 - z'^2\sin^2\beta)\tang\varphi\tang\varphi_1 = 1.$$

Il nous reste à examiner le cas où q est négatif, c'est-à-dire où

$$\operatorname{tang}\beta < \sqrt{1 - z'^2}\operatorname{tang}\alpha.$$

Faisant alors, dans l'équation (e),

$$\sqrt{-q}\operatorname{tang}\omega = \sqrt{p}\sin t,$$

et ensuite

$$\sqrt{-pq'}\sin t = \sqrt{-qp'}\sin\varphi,$$

on obtient finalement, après les réductions nécessaires,

$$s_1 + s_2 = \frac{2\sin\alpha}{\operatorname{tang}\beta}\sqrt{1 - z'^2\sin^2\alpha}\int\frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}{1 + n\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

où

$$n = -1 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}, \quad k^2 = \frac{(1 - z'^2)\operatorname{tang}^2\alpha - \operatorname{tang}^2\beta}{(1 - z^2)\operatorname{tang}^2\alpha + 1}.$$

Pour la différence des arcs, faisons, dans l'équation (f),

$$\sqrt{q_1}\operatorname{tang}\omega = \sqrt{p_1}\operatorname{tang}\psi,$$

il en résultera

$$s_1 - s_2 = 2z'\sin\alpha\sqrt{\frac{1 - z'^2\sin^2\alpha}{1 - z'^2\operatorname{tang}^2\alpha - \operatorname{tang}^2\beta}}\int\frac{\sqrt{1 - \cos^2\beta\sin^2\psi}}{1 + n_1\sin^2\psi}\,d\psi,$$

où

$$n_1 = \frac{z'^2\sin^2\alpha\sec^2\beta}{1 - z'^2\operatorname{tang}^2\alpha - \operatorname{tang}^2\beta}.$$

Dans le cas où $q = 0$, c'est-à-dire où

$$\operatorname{tang}\beta = \sqrt{1 - z'^2}\operatorname{tang}\alpha,$$

les arcs ne dépendront que des fonctions circulaires, comme on pourra le voir en se rappelant les équations (e) et (f).

M. Gudermann a démontré que l'aire sectorielle d'une ellipse sphérique s'exprime par une fonction elliptique de troisième espèce à paramètre circulaire; nous allons faire voir que l'aire de l'intersection d'un cône du second ordre avec une sphère, dans le cas le plus général qu'on vient de considérer, ne dépendra que de transcendantes elliptiques.

Pour cela, il faut se rappeler la formule connue pour la différentielle de l'aire A d'une courbe sphérique en coordonnées polaires, savoir,

$$dA = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \rho \, d\omega.$$

Substituant pour ρ sa valeur tirée de l'équation (c), on trouve, pour l'aire indéfinie,

$$A = \omega - \tfrac{1}{2} \int \frac{\sin 2\theta \pm \sqrt{4\Omega - 4\Omega - \sin^2 2\theta}}{\Omega} d\omega.$$

Mais, dans le cas dont il s'agit, Ω est une fonction linéaire de $\cos 2\omega$, et si l'on fait $\cos 2\omega = u$, on aura une expression pour A du type suivant :

$$A = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \cos = u) + \int \frac{\sin 2\theta \pm \sqrt{a + bu + cu^2}}{e + fu} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

a, b,... étant des coefficients constants. Cette expression est évidemment réductible aux fonctions elliptiques.

Le cas particulier de notre courbe où le sommet du cône est situé sur la surface de la sphère (dont j'ai discuté la rectification avec quelques détails dans le tome IX de ce Journal) est lié, par des relations intimes, avec l'ellipse sphérique. C'est ce que je vais montrer par les considérations suivantes.

Prenons le centre de la sphère pour le sommet d'un cône semblable au cône donné et semblablement placé; la sphéro-conique produite aura un centre verticalement opposé au sommet du cône donné, et elle divisera en parties égales les arcs des grands cercles qu'on mène de ce centre à notre courbe. Cette dernière, regardée sous ce point de vue, fournit une analogie remarquable avec l'expression de l'aire totale de l'ellipse plane, et qu'on ne trouve pas dans le cas de l'ellipse sphérique. En effet, l'équation d'une ellipse sphérique, dont les axes sont α et β, étant

$$\frac{1}{\sin^2 \rho} = \frac{\cos^2 \omega}{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha} + \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \frac{1}{2} \beta},$$

celle de notre courbe sera

$$\frac{1}{\sin^2 \rho} = \frac{\cos^2 \omega}{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha} + \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \frac{1}{2} \beta}.$$

d'où l'on déduit, pour la valeur de l'aire comprise entre α et un grand cercle qui fait l'angle ω avec α,

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\mathrm{arc}\left(\cos = \frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta\cos^2\omega - \sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\omega}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\omega + \sin^2\frac{1}{2}\beta\cos^2\omega}\right).$$

Faisant $\omega = \frac{1}{2}\pi$, et multipliant par 4, on trouve, pour l'aire sphérique entière que la courbe comprend,

$$4\pi\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta.$$

Il existe un autre procédé pour dériver la même courbe d'une sphéro-conique, lequel indique une analogie entre elle et le lieu géométrique des projections orthogonales du centre d'une section conique sur les tangentes.

Pour le faire voir, il est seulement nécessaire de rappeler les expressions pour un arc perpendiculaire, abaissé du centre d'une sphéro-conique sur un grand cercle tangent, qu'on doit aux géometres qui ont traité des propriétés de cette courbe. En effet, soient α et β les demi-axes d'une ellipse sphérique, et ϖ un arc abaissé du centre perpendiculairement sur une tangente, et faisant un angle ω avec α, on aura

$$\mathrm{tang}^2\varpi = \mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\omega + \mathrm{tang}^2\beta\sin^2\omega.$$

Mais si l'on regarde la sphéro-conique comme une hyperbole, il faudra la rapporter à la projection de l'un des axes extérieurs sur la sphère comme à son centre. Si donc on considère un arc perpendiculaire à une tangente, mené du centre extérieur qui est situé sur le prolongement de α, sa valeur sera donnée par l'équation

$$\mathrm{tang}^2\varpi = \mathrm{cotang}^2\alpha\cos^2\omega - \mathrm{cotang}^2\alpha\,\mathrm{tang}^2\beta\sin^2\omega\ [*].$$

---

[*] La démonstration de ces formules s'effectue sans difficulté.

Pour la première, soit l'équation du cône, qui donne la sphéro-conique,

$$x^2\,\mathrm{cotang}^2\alpha + y^2\,\mathrm{cotang}^2\beta - z^2 = 0;$$

celles d'un plan tangent quelconque, et d'un plan perpendiculaire passant par l'axe des z, seront respectivement

$$xx'\,\mathrm{cotang}^2\alpha + yy'\,\mathrm{cotang}^2\beta - zz' = 0.$$

Maintenant si, dans les équations (a) et (b), on pose $z' = 1$, il est aisé de voir qu'elles prendront respectivement les deux formes

$$(g)\quad \begin{cases} \tang^2 \frac{1}{2}\rho = \tang^2 \alpha \cos^2 \omega + \tang^2 \beta \sin^2 \omega, \\ \tang^2 \frac{1}{2}\rho = \cotang^2 \alpha \cos^2 \omega - \cotang^2 \alpha \tang^2 \beta \sin^2 \omega. \end{cases}$$

On conclut donc que les courbes représentées par ces équations sont les lieux géométriques des points situés sur les grands cercles, menés du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole sphérique perpendiculairement aux tangentes, de telle manière que leurs distances au centre soient divisées en parties égales par les tangentes.

On peut démontrer ce résultat par une méthode très-simple, déduite

---

et

$$\nu x' \cotang^2 \alpha - \mu y' \cotang^2 \beta = 0$$

Donc, en désignant par λ, μ, ν les angles que la droite, représentée par ce système d'équations, fait avec les axes des x, y, z, on aura

$$z' \cotang^2 \alpha \cos \lambda + y' \cotang^2 \beta \cos \mu - x' \cos \nu = 0,$$
$$x' \cotang^2 \alpha \cos \mu - y' \cotang^2 \beta \cos \lambda = 0.$$

Tirant les valeurs de $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$, et substituant dans l'équation

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1,$$

on obtient

$$\tang^2 \nu = \frac{x'^2 \cotang^2 \alpha + y'^2 \cotang^2 \beta}{x'^2 \cotang^4 \alpha + y'^2 \cotang^4 \beta}.$$

Mais, en appelant ω l'angle que fait le plan des xz avec celui qui contient l'axe des z et la droite dont nous avons parlé, on a

$$\sin^2 \omega = \frac{y'^2 \cotang^2 \beta}{x'^2 \cotang^4 \alpha + y'^2 \cotang^4 \beta},$$
$$\cos^2 \omega = \frac{x'^2 \cotang^4 \alpha}{x'^2 \cotang^4 \alpha + y'^2 \cotang^4 \beta},$$

de la l'équation

$$\tang^2 \nu = \tang^2 \alpha \cos^2 \omega + \tang^2 \beta \sin^2 \omega,$$

qui est identique avec la formule du texte, l'angle ν étant mesuré par l'arc ϖ. L'expression, dans le cas hyperbolique, peut être prouvée de la même manière.

de la propriété des cônes réciproques qu'on doit à M. Chasles. En effet, soit une surface conique construite en abaissant des droites perpendiculairement du centre de la sphère sur les plans tangents au cône qui a son sommet S sur la surface; ce cône nouveau sera du second ordre et réciproque à celui que nous avons donné, c'est-à-dire que ses plans tangents couperont les arêtes du cône donné à angles droits, et la sphéro-conique qu'il produit aura le point S pour un de ses centres. Si donc on abaisse de ce centre les arcs perpendiculaires sur les tangentes à ladite conique, et si on les prolonge jusqu'à la rencontre de notre courbe, on verra qu'ils sont divisés en parties égales par les tangentes, ce qu'il fallait démontrer.

Il est à propos de remarquer ici deux variétés de la sphéro-conique, qui ont beaucoup d'analogie avec l'hyperbole équilatère. La premiere a lieu quand il existe entre les demi-axes la relation

$$\sin\alpha = \operatorname{tang}\beta;$$

son équation, par rapport au centre hyperbolique situé sur le prolongement de α, est

$$\frac{1}{\operatorname{tang}^2\rho} = \frac{\cos^2\omega}{\operatorname{tang}^2 a} - \frac{\sin^2\omega}{\sin^2 a},$$

où

$$a = \tfrac{1}{2}\pi - \alpha$$

et est analogue au demi-axe réel de l'hyperbole. Cette courbe jouit des propriétés suivantes :

1°. Soit ϖ l'arc du centre perpendiculaire à la tangente à l'extrémité d'un arc vecteur quelconque ρ, on aura

$$\sin\varpi \operatorname{tang}\rho = \sin a \operatorname{tang} a.$$

2°. Si l'on mène des arcs de grands cercles des foyers conjugués des branches opposées à un point quelconque pris sur la courbe, le produit des tangentes trigonométriques des demi-arcs sera égal au carré de la tangente du demi-arc tiré du centre à ce point.

3°. Elle est lieu géométrique du sommet d'un triangle sphérique

dont la base est donnée, et dont la différence des angles à la base est constante.

4°. La courbe particulière représentée par la seconde des équations (g) qui appartient à cette conique, coïncide avec le lieu géométrique du sommet d'un triangle sphérique, dont la base est donnée, et dont le produit des sinus des demi-côtés est constant et égal au carré du sinus de la quatrième partie de la base: son arc peut s'exprimer par une transcendante elliptique de première espèce.

J'ai déjà considéré cette courbe dans une Lettre adressée à M. Liouville et publiée dans le tome VIII de ce Journal.

On reconnaîtra sans peine les propriétés de l'hyperbole équilatère auxquelles celles-ci sont analogues.

L'autre variété de la sphéro-conique à laquelle j'ai fait allusion, a lieu quand le plus petit axe est égal à $\frac{1}{2}\pi$; son équation, rapportée au centre extérieur sur le prolongement de l'axe le plus grand, est

$$\operatorname{tang}^2 \rho \cos 2\omega = \operatorname{tang}^2 a.$$

Les deux propriétés suivantes, dont jouit cette courbe, paraîtront assez remarquables:

1°. La courbe représentée par la seconde des équations (g) qu'on en tire a pour équation

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\rho = \operatorname{tang}^2 a \cos 2\omega;$$

elle coïncide avec le lieu du sommet d'un triangle sphérique dont la base est donnée, et dont le produit des tangentes des demi-côtés est constant et égal au carré de la tangente de la demi-base. Son arc sera aussi exprimé par une fonction elliptique de troisième espèce, dont le module est $\sin \frac{1}{4}\pi$.

2°. Dans une ellipse sphérique de cette espèce, si l'on mène deux cordes (arcs de grands cercles) par le foyer, mutuellement à angles droits, leur somme sera constante et égale à π.

Donc, si l'on prolonge une des cordes jusqu'à la rencontre de la seconde branche de la conique, la partie comprise entre les deux branches sera égale à l'autre, ce qui a une analogie directe avec une propriété connue de l'hyperbole équilatère.

Le lieu géométrique des projections orthogonales du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole quelconque, sur les tangentes, jouit d'une propriété très-analogue à celle de la lemniscate, qui n'est qu'un cas particulier de l'ellipse de Cassini.

Premièrement, pour l'ellipse, soient a et b les demi-axes de la courbe, et, sur le grand axe, prenons les deux points qui divisent en parties égales les distances entre le centre et les foyers. De ces points, comme centres, décrivons deux cercles égaux avec le rayon $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Si l'on mène d'un point quelconque pris sur le lieu des projections du centre, les tangentes à ces cercles, leur rectangle sera constant et égal au carré de la moitié de la corde qui est commune aux deux cercles.

Pour l'hyperbole, il faut distinguer deux cas, selon que l'axe réel est plus grand ou plus petit que l'axe imaginaire. Dans le premier, décrivons des cercles égaux avec le rayon $\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$ autour des deux points qui divisent en parties égales les distances entre le centre et les foyers. Si l'on mène d'un point quelconque, pris sur le lieu dont il s'agit, les tangentes à ces cercles, leur rectangle sera constant et égal au carré de la tangente menée du centre à l'un d'eux.

Dans l'autre cas, quand $b > a$, décrivons des cercles égaux avec les mêmes points comme centres, le rayon étant $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$. Si d'un point quelconque pris sur le lieu des projections du centre on mène les droites qui, rencontrant les circonférences de ces cercles, soutendent des angles droits aux centres, leur rectangle sera constant et égal à $\frac{1}{2}b^2$.

Quelques propriétés analogues se présentent, dans la géométrie de la sphère.

Cherchons le lieu d'un point tel, que menant de là les arcs tangents t_1, t_2 à deux petits cercles égaux, le produit $\operatorname{tang}\frac{1}{2}t_1 \operatorname{tang}\frac{1}{2}t_2$ soit constant et égal au carré de la tangente de la quatrième partie de la corde commune si les cercles se coupent, ou, si le contraire a lieu, au carré de la tangente de la moitié de l'arc tangent qu'on mène à l'un d'eux du milieu de la distance des centres. En prenant ce point milieu pour origine des coordonnées polaires, et désignant respectivement par y et δ le rayon des cercles et la moitié de la distance de leurs

centres, on trouve, pour l'équation du lieu cherche,

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\rho = \frac{\sin^2\gamma + \sin^2\delta}{\cos^2\gamma + \cos^2\delta}\cos^2\omega + \frac{\sin^2\gamma - \sin^2\delta}{\cos^2\gamma + \cos^2\delta}\sin^2\omega.$$

Le premier des cas dont nous avons parlé répond à $\gamma > \delta$, et la forme de l'équation s'accorde avec celle de la première des équations (g); dans l'autre cas, quand $\gamma < \delta$, elle appartient à la seconde.

On parviendra sans difficulté aux théorèmes semblables en prenant les sinus des demi-arcs au lieu des tangentes.

D'une manière analogue à la précédente, on peut décrire une section conique plane en prenant le lieu d'un point tel, que si de là l'on mène des tangentes à deux cercles donnés (qui peuvent être inégaux), leur somme ou différence sera constante.

Semblablement on peut décrire une sphéro-conique en prenant le lieu d'un point tel, que si de là l'on mène des arcs tangents à deux petits cercles donnés, leur somme ou différence sera constante.

Ce dernier théorème paraît donner une extension à la théorie des droites focales des cônes du second ordre, en substituant pour elles deux cônes de révolution.

Revenons à l'équation générale (c), ou

$$\Omega \sin^2\rho + \sin 2\theta \cos\rho = 1,$$

et l'on verra qu'elle peut être transformée dans

$$\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\rho - 2\Omega \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\rho + \frac{1 - \sin 2\theta}{1 - \sin 2\theta} = 0,$$

en écrivant simplement Ω dans cette dernière au lieu de $\frac{1 - 2\Omega}{1 - \sin 2\theta}$.

Ceci démontre que le produit des tangentes trigonométriques des demi-arcs vecteurs qui répondent à la même valeur de l'angle polaire sera constant; si donc, dans cette classe de courbes, on détermine quatre points en tirant par l'origine deux arcs vecteurs quelconques, ils seront situés sur la circonférence du même petit cercle.

On tire aussi de là une méthode pour déduire, comme un lieu sphérique, l'intersection symétrique d'une sphère avec un cône du second ordre, de la sphéro-conique.

En effet, si l'on porte sur un arc vecteur central ρ d'une sphéroconique, une partie ρ_1, comptée du centre et telle que

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\rho \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\rho_1 = \text{constante},$$

l'extrémité de l'arc ρ_1 décrira une courbe formée par l'intersection d'un cône dont un des axes principaux passe par le centre de la sphère.

Considérons la classe des courbes planes dont l'équation

$$r^4 - 2\Omega r^2 + k^4 = 0$$

est analogue à la précédente dans la géométrie sphérique. Elle admet une formule de rectification tout à fait semblable; car si l'on désigne par s_1, s_2 les arcs qui répondent à la même valeur de l'angle polaire ω, on trouvera

$$s_1 - s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{4\Omega^2 + \Omega'^2 - 4k^4}{\Omega - k^2}}\, d\omega,$$

et

$$s_1 - s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{4\Omega^2 + \Omega'^2 - 4k^4}{\Omega - k^2}}\, d\omega.$$

Quand Ω est une fonction linéaire de $\cos 2\omega$, il n'est pas difficile d'apercevoir que chacune de ces expressions est réductible à une intégrale du type

$$\int \sqrt{\frac{p + q \operatorname{tang} \omega}{p' + q' \operatorname{tang} \omega}}\, d\omega,$$

et, par conséquent, à une transcendante elliptique, en général de la troisième espèce. Cette forme de Ω se trouve dans le cas des courbes suivantes :

1°. Le lieu géométrique d'un point tel que si de là l'on mène les tangentes à deux cercles égaux donnés qui ne se coupent pas, leur rectangle soit constant et plus petit que le carré de la tangente menée à un d'eux du milieu de la distance des centres.

2°. Le lieu géométrique d'un point tel que si de là l'on mène des droites qui rencontrent les circonférences de deux cercles égaux donnés, de manière à soutendre des angles droits à leurs centres,

leur rectangle soit constant et plus petit que la somme des carrés du rayon des cercles et de la moitié de la distance des centres.

La limite de ces deux lieux, quand les cercles vont s'évanouir, coïncide avec le cas particulier de l'ellipse de Cassini, auquel M. Serret a donné le nom de *lemniscate hyperbolique*, et dans lequel la somme et la différence des arcs sont exprimables par les fonctions de la première espèce.

3°. Le lieu géométrique d'un point tel que si de là l'on mène deux tangentes à une ellipse donnée, l'angle qu'elles font soit constant. Cette courbe se compose de deux branches fermées, concentriques avec l'ellipse, qui satisfont à la condition donnée par les angles supplémentaires.

Il est bon de remarquer que le lieu semblable, pour le cas d'une hyperbole équilatère, coïncidera avec la variété elliptique de la cassinoïde, et ses foyers ou pôles seront situés sur l'axe imaginaire.

NOTE

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0;$$

PAR M. LEBESGUE.

L'équation qui fait l'objet de cette Note a été traitée d'une manière fort élégante par M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome XXIV, page 1).

Voici comment l'illustre auteur résume sa méthode :

« Étant donnée l'équation différentielle

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0,$$

» il faudra résoudre l'équation cubique

$$(A - Z)(B' - Z)(C'' - Z) - B''C'(A - Z) - CA''(B' - Z) - A'B(C'' - Z) + A'B''C + A''BC' = 0;$$

» et si, en représentant les trois racines différentes par λ, λ', λ'', on » pose, pour abréger,

$$B'C'' - B''C' = D, \quad C'A'' - C''A' = D', \quad A'B'' - A''B' = D'', \quad B' + C'' = E,$$

» l'intégrale complète de l'équation différentielle proposée sera

$$\left.\begin{array}{l} [D - E\lambda + \lambda^2 + (D' + A'\lambda)x + (D'' + A''\lambda)y]^{\lambda' - \lambda''} \\ \times [D - E\lambda' + \lambda'^2 + (D' + A'\lambda')x + (D'' + A''\lambda')y]^{\lambda'' - \lambda} \\ \times [D - E\lambda'' + \lambda''^2 + (D' + A'\lambda'')x + (D'' + A''\lambda'')y]^{\lambda - \lambda'} \end{array}\right\} = \textit{constante}.$$

On peut se demander ce que devient cette formule pour le cas des racines égales, et comment on peut la mettre sous forme réelle quand elle est compliquée d'imaginaires. Pour le cas des racines inégales et sous la relation

$$D'A'' = A''D',$$

comme on a

$$D' + A'\lambda = 0, \quad D'' + A''\lambda = 0, \quad D - E\lambda + \lambda^2 = 0,$$

il faut encore modifier la formule. L'auteur n'étant point entré dans ces détails plus longs que difficiles, j'indiquerai une méthode qui, dans tous les cas, et par la résolution de l'équation cubique donnée plus haut, conduit à l'intégrale sous forme réelle. Elle se rapproche beaucoup plus du moyen employé par Euler pour séparer les variables dans l'équation

$$ydx(c + nx) - dy(y + a + bx + nx^2) = 0, \quad Pdx - Qdy = 0,$$

ou

$$nx(xdy - ydx) + dy(y + a + bx) - cydx = 0.$$

Euler pose

$$u = \frac{P}{Q},$$

ce qui conduit à l'équation

$$\frac{du}{u[na + c - bc + (b - 2c)u + u^2]} = \frac{dx}{(c + nx)(a + bx + nx^2)},$$

mais il ne fait point remarquer qu'en posant

$$u - c = nv,$$

il en résulte

$$\frac{dv}{(c + nv)(a + bv + nv^2)} = \frac{dx}{(c + nx)(a + bx + nx^2)};$$

de sorte que l'intégration dépend uniquement de la résolution de l'équation cubique

$$c + nx(a + bx + nx^2) = 0.$$

Pour l'équation plus générale

$$(A + A'x + A''y)xdy - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0,$$

on posera d'abord

$$(A + A'x + A''y) = u,$$

et l'élimination de y conduira à une équation qui peut se mettre

sous la forme

$$\frac{dx}{du} = \frac{\alpha u x + \beta x + \gamma u + \delta}{\alpha' u + \beta' x + \gamma' u + \delta'} = \frac{P}{Q}, \quad (\alpha = A'').$$

Cette équation se traite précisément comme celle d'Euler, en posant

$$z = \frac{P}{Q};$$

ce qui donne l'équation à variables séparées

$$\frac{dz}{\beta' z - \beta'(2\beta - \gamma')z^2 + (\beta^2 - \beta\gamma' - \beta'\gamma + \alpha\delta')z - (\alpha\delta - \beta\gamma)}$$
$$= \frac{du}{\alpha' u + \alpha(\beta + \gamma')u + (\beta\gamma' - \beta'\gamma + \alpha\delta')u + \beta\delta' - \beta'\delta}.$$

Quand on n'a ni $\alpha = 0$, ni $\beta' = 0$, en posant

$$\alpha u - \beta = \beta' w,$$

on trouvera

$$\frac{dz}{\psi z} = \frac{dw}{\psi w};$$

$$\psi z = \beta'^2 z^3 - \beta'(2\beta - \gamma')z^2 - (\beta^2 - \beta\gamma' - \beta'\gamma + \alpha\delta')z - \alpha\delta - \beta\gamma,$$

et de même, en posant

$$\alpha w - \beta = \beta' z,$$

on trouvera

$$\frac{dw}{\varphi w} = \frac{du}{\varphi u};$$

$$\varphi u = \alpha^2 u^3 + \alpha(\beta - \gamma')u^2 - (\beta\gamma' - \beta'\gamma + \alpha\delta')u - \beta\delta' - \beta'\delta.$$

Ainsi l'intégrale dépend de la résolution de l'une des équations

$$\psi z = 0, \quad \varphi u = 0.$$

La dernière revient précisément à l'équation cubique donnée plus haut.

Il y a quelques cas en défaut, mais pour lesquels les variables se séparent sans difficulté, et la résolution de $\varphi u = 0$ suffit toujours pour la détermination de l'intégrale.

L'équation différentielle

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0$$

n'est pas réduite à la forme la plus simple; on pourrait prendre

$$(a'x + a''y)(xdy - ydx) + (b + b'x + b''y)dy + (c + c'x + c''y)dx = 0;$$

c'est pour la symétrie des calculs et du résultat que l'auteur a introduit un coefficient surnuméraire et pris convenablement les signes.

Si l'on se proposait ce problème: Quelles sont les équations de la forme

$$(dx)^2(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dy + Ex + F) + (dy)^2(A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'y + E'x + F') = 0$$

qui peuvent avoir une intégrale de forme

$$(\alpha + \beta x + \gamma y)^2(\alpha' + \beta' x + \gamma' y)^2(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' y)^2 = \text{constante},$$

on serait conduit à un système de douze équations qui déterminerait les rapports $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}; \frac{\alpha'}{\gamma'}, \frac{\beta'}{\gamma'}; \frac{\alpha}{\gamma''}, \frac{\beta}{\gamma''}$ par le moyen d'une équation du troisième degré et d'autres de degré inférieur, et qui donnerait, en outre, des équations de condition entre les coefficients A, B, etc., A′, B′, etc. Ces équations de condition n'existent plus pour l'équation

$$(dx)^2(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + F) + (dy)^2(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + F) = 0,$$

et les équations définitives prennent une forme symétrique quand on choisit l'équation différentielle de M. Jacobi; l'analyse même indique l'introduction d'un coefficient surnuméraire, car on obtient finalement huit équations qui se simplifient quand on partage l'une d'elles en deux autres. Nous ne mettrons pas ici ce calcul, assez élégant, parce que la méthode indiquée plus haut est plus simple et plus générale.

NOTE

SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE;

PAR M. ABEL TRANSON.

Le double objet de la Mécanique est de calculer les forces capables de produire un mouvement connu; et, inversement, déterminer les circonstances du mouvement quand les forces sont données.

Mais si l'on fait attention que les forces n'entrent pas directement dans le calcul, mais seulement leurs mesures, qui sont les secondes dérivées de l'espace exprimé en fonction du temps, on conviendra que le problème de la mécanique pourrait être posé d'une manière plus étendue; c'est-à-dire qu'on pourrait proposer, étant données les lois du mouvement par les relations entre le temps et l'espace parcouru, conclure de ces données les lois qui régissent non pas seulement les vitesses et les forces, c'est-à-dire les premières et secondes dérivées, mais les dérivées troisièmes,... ou d'un ordre quelconque; ou bien, étant données les dérivées troisièmes,... ou supérieures, en conclure inversement les circonstances immédiates du mouvement, comme la vitesse du mobile, la forme de la trajectoire, etc.

Si jusqu'ici, dans le problème de la mécanique, on n'a attaché d'importance qu'aux relations qui impliquent, avec la fonction représentative de l'espace parcouru, ses deux premières dérivées, n'est-ce pas uniquement parce qu'on n'a attaché qu'à ces deux dérivées, première et seconde, une signification concrète ou une notion métaphysique. Cependant, si l'on conçoit la vitesse comme une propriété inhérente au mobile et génératrice de l'espace qu'il parcourt; puis la force comme une entité, extérieure à la matière et génératrice de la vitesse; pourquoi s'arrêterait-on dans cette progression

d'idées? pourquoi n'admettrait-on pas une entité consécutive aux précédentes, génératrice de la force et mesurée naturellement par la troisième dérivée; puis une autre, génératrice de la précédente et mesurée par la quatrième dérivée, et ainsi indéfiniment? Et comme la supériorité de la physique des modernes dépend en grande partie de l'application qu'on a faite des relations générales préalablement reconnues entre les espaces, les vitesses et les forces, serait-il déraisonnable d'attendre, de l'étude des relations qui existent naturellement entre ces entités consécutives, des résultats nouveaux et importants pour la science?

L'introduction d'une notion métaphysique nouvelle, ou plutôt d'une infinité de notions de ce genre, serait, je l'avoue, de nature à altérer le caractère de simplicité qui prédomine dans la science moderne.

Quoi qu'il en soit, et sans prendre aucun parti à cet égard, on peut traiter la question à un point de vue purement mathématique. C'est-à-dire que, tout comme indépendamment de la notion de la force, il serait encore de l'essence de la mécanique de rechercher la valeur de la seconde dérivée de l'espace, estimée dans la direction de la normale principale et d'établir ainsi la relation remarquable qui est entre cette valeur et le rayon de courbure; ainsi il peut être utile de rechercher comment les dérivées troisième, quatrième ou supérieures influent sur la forme de la trajectoire.

Je présente ici une première ébauche de ce problème. Me bornant, d'ailleurs, à considérer le mouvement d'un point matériel unique, et dans ce mouvement l'influence des troisièmes dérivées, je ferai voir comment elles déterminent, dans le cas des trajectoires planes, la valeur de la première déviation de courbure [*], et, dans les trajectoires à double courbure, le rayon de la seconde courbure et celui de la sphère osculatrice.

J'appellerai *virtualité* la première dérivée de la force accélératrice, ou troisième dérivée de l'espace parcouru; c'est donc une *théorie des*

[*] Pour ce qu'on doit entendre par *déviation de la forme circulaire*, ou *première déviation de courbure*, voir ce Journal, tome VI, 1841, pages 191 et suivantes.

virtualités qu'il y aurait à présenter en regard de la *théorie des forces*. Pour que cette étude fût complète, il faudrait étendre ces considérations au mouvement d'un système quelconque de points matériels. Je préviens le lecteur que je n'entends, d'ailleurs, attacher au mot *virtualité* aucune signification concrète. Je ne l'emploie que pour faciliter les énoncés en abrégeant le discours.

Ainsi, dans le cas du *mouvement rectiligne*, quand l'espace parcouru est exprimé à l'aide du temps par une fonction du troisième degré, je dirai que la virtualité est constante, et réciproquement. Mais si la fonction est quelconque, la virtualité varie à chaque instant; elle a pour mesure la valeur de la force qu'elle engendrerait dans l'unité de temps, si pendant ce temps elle était constante: c'est $\frac{d\varphi}{dt}$, en appelant φ la force accélératrice. La *virtualité motrice* serait $m\frac{d\varphi}{dt}$, en appelant m la masse du mobile.

Dans le cas du *mouvement curviligne*, les virtualités se composent et se décomposent suivant la même loi que les forces et les vitesses, c'est-à-dire par la règle du parallélogramme. Ce même principe s'étend à la composition et à la décomposition des dérivées d'un ordre quelconque; il suppose seulement l'extension corrélative du principe de l'inertie. Il faut dire, par exemple, que l'effet dynamique d'une virtualité sur un corps est indépendant de l'état actuel de ce corps, c'est-à-dire qu'elle engendre toujours dans un temps donné une même force, quelles que soient la direction actuelle du mouvement, la vitesse du mobile et la force qui lui est déjà appliquée. Ce postulatum étant admis, la démonstration de la valeur des virtualités estimées dans une direction quelconque se fait absolument comme pour les forces.

D'après cela, il est manifeste à priori que les deux principaux théorèmes qu'on obtient dans la considération des secondes dérivées, et qui sont relatifs à l'évaluation des deux composantes de la force accélératrice, dont l'une suivant la tangente ou direction de la vitesse, et l'autre dans un sens perpendiculaire, ont leurs analogues ou plutôt leurs identiques dans tous les ordres. C'est ainsi que la virtualité motrice, estimée dans le sens de la force accélératrice φ, est égale à $m\frac{d\varphi}{dt}$; tan-

dis que l'autre composante a pour mesure $mv\frac{d\omega}{dt}$, en appelant $d\omega$ l'angle infinitésimal que font entre elles deux directions consécutives de la force accélératrice.

Ces préliminaires établis, pour obtenir, *dans le cas d'une trajectoire plane*, la tangente de l'angle δ que fait avec la normale la ligne droite, lieu des centres de toutes les coniques qui ont avec cette courbe un contact du second ordre; tangente qui offre, comme je l'ai démontré ailleurs [*], la mesure représentative de la quantité dont le troisième élément infinitésimal s'écarte du cercle osculateur déterminé par les deux premiers, et que j'ai appelée, à cause de cela, *première déviation de courbure;*

Soient ψ la composante normale et τ la composante tangentielle de la virtualité. L'espace parcouru dans le sens de la normale pendant le temps dt sera, en négligeant les termes du quatrième ordre,

$$e = \frac{V^2}{r}\frac{dt^2}{1.2} + \psi\frac{dt^3}{2.3},$$

et, dans le sens de la tangente,

$$l = vdt - \frac{dv}{dt}\frac{dt^2}{1.2} + \tau\frac{dt^3}{1.2.3}.$$

Appelons l' la partie du chemin dans le sens de la tangente jusqu'à la rencontre du cercle osculateur, de sorte que $l' = \sqrt{2er}$; on a, d'après la définition même de la première déviation,

$$l = l' + 2e \operatorname{tang} \delta.$$

Combinant entre elles ces diverses relations, il vient finalement

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{r}{2.3}\cdot\frac{3\psi\frac{dv}{dt} - \tau V^2}{\psi};$$

ou bien, en introduisant la force accélératrice normale $F = \frac{V^2}{r}$ et la

[*] Dans le Mémoire déjà cité. Voyez le tome VI de ce Journal, pages 192 et 193.

force tangentielle $T = \frac{dv}{dt}$,

$$\text{tang}\,\delta = \frac{1}{2.3}\,\frac{3FT - V\psi}{F^2}.$$

Il est remarquable que la déviation de courbure circulaire ne dépende que de la virtualité normale ψ, sans la virtualité tangentielle τ; de même que la grandeur de la courbure circulaire ne dépend également que de la force accélératrice normale sans la force tangentielle.

Quand la déviation est nulle, c'est-à-dire quand la trajectoire est un cercle, ou seulement lorsqu'elle a un contact du troisième ordre avec le cercle osculateur, on a

$$\text{tang}\,\delta = 0;$$

et, par suite, la relation de condition

$$3FT - V.\psi = 0.$$

Dans le cas d'une *trajectoire à double courbure*, on a, pour déterminer la sphère osculatrice, les quatre équations

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2,$$

$$(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy + (z-\gamma)\,dz = 0,$$

$$(x-\alpha)\,d^2x + (y-\beta)\,d^2y + (z-\gamma)\,d^2z + ds^2 = 0,$$

$$(x-\alpha)\,d^3x + (y-\beta)\,d^3y + (z-\gamma)\,d^3z + 3\,ds\,d^2s = 0.$$

Si l'on représente, comme précédemment, la vitesse par V, et la force tangentielle par T, la troisième équation pourra se mettre sous la forme

$$\frac{\alpha - x}{R}\frac{d^2x}{dt} + \frac{\beta - y}{R}\frac{d^2y}{dt} + \frac{\gamma - z}{R}\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{3VT}{R}.$$

Or, il est manifeste que le premier membre représente la somme des trois virtualités composantes projetées sur le rayon de la sphère osculatrice, c'est-à-dire la virtualité ψ estimée dans la direction de ce rayon:

on a donc

$$\psi = \frac{3\,\mathrm{VT}}{\mathrm{R}}.$$

D'ailleurs on trouvera facilement, à l'aide de la troisième des quatre équations ci-dessus, que la force accélératrice estimée suivant une ligne qui joindrait l'élément de la trajectoire à un point quelconque de l'axe polaire est égale à $\frac{\mathrm{V}^2}{\rho}$, en appelant ρ la longueur de cette ligne : formule qui donne, en particulier, soit la force centrifuge, dirigée vers le centre du cercle osculateur $f = \frac{\mathrm{V}^2}{r}$, soit la force dirigée vers le centre de la sphère osculatrice $\mathrm{F} = \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}}$. De là on pourra tirer cette autre expression :

$$\psi = \frac{3\,\mathrm{FT}}{\mathrm{V}}.$$

D'ailleurs, on doit remarquer de nouveau que le rayon de la sphère osculatrice dépend exclusivement de la virtualité normale à la surface de cette sphère.

Avec la sphère osculatrice, il est indispensable de déterminer le rayon de seconde courbure, pour que la trajectoire soit complétement définie dans son troisième élément. Représentons par W′ la virtualité estimée normalement au plan osculateur; on trouvera comme il suit une relation simple entre W′ et le rayon de la seconde courbure.

Premièrement on a

$$\mathrm{W}' = \frac{(dz\,d^2y - dy\,d^2z)\frac{dx}{dt} + (dy\,d^2x - dx\,d^2y)\frac{dz}{dt} + (dz\,d^2y - dy\,d^2x)\frac{dy}{dt}}{\mathrm{M}}.$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{M} = \sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}\,;$$

l'expression de W′ se mettra sans difficulté sous la forme

$$\mathrm{W}' = \frac{(dx\,d^2y\,dz - d^3x\,dy)\frac{dx}{dt} + (dy\,d^2z\,dx - d^3y\,dz)\frac{dy}{dt} + (dz\,d^2x\,dy - d^3z\,dx)\frac{dz}{dt}}{\mathrm{M}}.$$

Or, le premier facteur de cette expression est précisément l'inverse du rayon de seconde courbure ou $\frac{1}{r'}$, et il est facile de voir que la quantité $\frac{1}{dt^3}$ M est égale à Vf, en appelant f la force dirigée suivant la normale principale ou force centrifuge; on a donc

$$W'' = \frac{Vf}{r'}.$$

ou bien, en mettant pour f sa valeur $\frac{V^2}{r}$, il viendra définitivement la formule

$$W'' = \frac{V}{r.r'}.$$

SUR UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE D'UNE CLASSE DE FONCTIONS

PAR J. LIOUVILLE.

Soient $x, y, \ldots, z$ des variables, comprises entre certaines limites qui seront celles des intégrales que nous considérerons tout à l'heure; $x', y', \ldots, z'$ des valeurs quelconques de ces variables; l une fonction donnée de $x, y, \ldots, z$, et l' la même fonction de $x', y', \ldots, z'$; enfin soit V une fonction donnée aussi de $x, y, \ldots, z, x', y', \ldots, z'$, symétrique par rapport à ces deux groupes de variables.

S'il existe des fonctions ζ de $x, y, \ldots, z$ et ζ' de $x', y', \ldots, z'$ satisfaisant à une équation de la forme

$$\text{(A)} \qquad \int\int \ldots \int l' V \zeta' \, dx' \, dy' \ldots dz' = m\zeta,$$

m étant un paramètre constant, spécial pour chaque fonction ζ, ces fonctions jouiront de la propriété fondamentale suivante : soient deux d'entre elles ζ, ζ_1, répondant à deux paramètres différents m, m_1; on aura

$$\text{(B)} \qquad \int\int \ldots \int l \zeta \zeta_1 \, dx \, dy \ldots dz = 0.$$

Pour s'en convaincre, il suffit de multiplier par $l\zeta_1 \, dx \, dy \ldots dz$ l'équation (A), puis d'intégrer, ce qui donne au second membre la quantité

$$m \int\int \ldots \int l \zeta \zeta_1 \, dx \, dy \ldots dz,$$

et au premier une intégrale dont on n'altère pas la valeur en changeant les unes dans les autres les lettres accentuées et les lettres sans accents : or, après ce changement, l'intégrale coïncide avec celle qu'on obtiendrait en cherchant d'une manière semblable la valeur de

$$m_1 \int\int \ldots \int l \zeta \zeta_1 \, dx \, dy \ldots dz.$$

De là résulte immédiatement l'équation (B).

On voit sur-le-champ la conséquence à tirer de la propriété précédente pour le développement des fonctions en séries de la forme $\sum A\zeta$, lorsqu'un tel développement est possible. On en conclut aussi que, quand la fonction donnée l est toujours positive ou toujours négative, les paramètres m ne peuvent pas être imaginaires. D'ailleurs on comprend sans peine qu'au premier membre de l'équation (A) pourraient être substituées des intégrations plus compliquées, ou même des opérations d'un autre genre, sans que notre théorème (modifié convenablement, s'il le faut, dans le sens de ces opérations nouvelles) et la démonstration même cessassent d'avoir lieu; car ce que l'on vient de lire repose essentiellement sur une certaine symétrie qu'il suffit de conserver. Ajoutons qu'il y a des résultats analogues pour des classes d'équations simultanées. Au reste, c'est sur des équations de la forme (B) que reposent, comme on sait, les solutions de la plupart des questions de physique mathématique. Mais en tirant ici ces équations d'une source nouvelle, on agrandit encore le champ des applications dont elles sont susceptibles.

NOTE

RELATIVE

A L'INSTABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS;

PAR M. JULES VIEILLE.

Considérons un système de n points matériels en équilibre, et liés entre eux d'une manière quelconque.

Désignons, comme à l'ordinaire, par X, Y, Z les composantes parallèles à trois axes rectangulaires de la force motrice qui sollicite le point (x, y, z) dont la masse est m, et soient

$$(1) \qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots$$

les équations, au nombre de i, qui expriment les liaisons du système. L, M, N,... sont des fonctions des coordonnées $x, y, z, x', y', \ldots$ qu'on suppose ne pas renfermer le temps t explicitement. Le nombre des coordonnées de tous les points matériels étant $3n$, il y aura $3n - i$ variables indépendantes, et l'on peut concevoir qu'on exprime toutes les coordonnées en fonction de ces variables.

Lorsque les forces données satisfont à la condition que la somme

$$\sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

étendue à tous les points du système, soit la différentielle exacte d'une fonction des coordonnées $x, y, z, x', \ldots$; ou, du moins, lorsque cette condition d'intégrabilité est remplie par la somme ci-dessus, après qu'on l'a réduite à ne contenir que les seules variables indépendantes; on sait que, pour les valeurs de ces variables qui répondent à la position d'équilibre, la *fonction des forces* (c'est ainsi qu'on appelle la fonction dont $\sum(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ est la différentielle) est, en général, un *maximum* ou un *minimum*.

De plus, si l'on vient à écarter un tant soit peu le système de cette

position. on démontre que, dans le cas où la fonction des forces est un *maximum*, la somme des forces vives ne peut demeurer constamment positive, qu'autant que les variables qui déterminent à chaque instant la position du système restent toujours très-petites; en sorte que *l'équilibre est* alors *stable*. Mais ce genre de calcul ne fait pas voir que, dans le cas où la fonction des forces est un *minimum*, l'équilibre soit nécessairement *instable*.

Lagrange a résolu cette deuxième partie de la question dans la sixième section de la *Mécanique analytique*, où il étudie les oscillations très-petites d'un système de points matériels autour de leurs positions d'équilibre. Il y démontre incidemment l'instabilité de l'équilibre, dans le cas où la fonction est un minimum.

L'objet que nous nous proposons est de donner à cette démonstration une forme plus simple et propre à être admise dans l'enseignement.

Nous partirons de l'équation générale de la dynamique, savoir :

$$(2)\quad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt}\,\delta z\right) = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

et d'abord, il convient d'y remplacer x, y, z, x',... par leurs valeurs en fonction des $3n - i$ variables indépendantes.

Soient α, β, γ,... les valeurs de ces variables pour la position d'équilibre, et p, q, r,... les accroissements qu'elles prennent au bout du temps t par suite d'un déplacement très-petit imprimé au système. p, q, r,... sont des fonctions inconnues du temps t, dont les valeurs sont d'abord très-petites, au commencement du mouvement; chacune des coordonnées x, y, z, x',... est une fonction connue de $\alpha+p$, $\beta+q$, $\gamma+r$,... qui ne renferme pas t explicitement. Nous supposerons, pour abréger l'écriture, que ces variables indépendantes soient au nombre de trois.

Lorsqu'on substitue les valeurs de x, y, z, x',... dans la somme $\sum (Xdx + Ydy + Zdz)$, elle devient, par hypothèse, la différentielle exacte d'un fonction $\varphi(\alpha+p, \beta+q, \gamma+r)$; par conséquent, la même substitution, effectuée dans le second membre de l'équation (2) où les d sont changés en δ, donnera

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \delta.\varphi(\alpha+p, \beta+q, \gamma+r).$$

Tant que p, q, r auront de très-petites valeurs, cette fonction φ pourra être développée, par la formule de Taylor, en série très-convergente, ordonnée suivant les puissances et les produits de p, q, r. Comme $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ est un minimum, les termes de première dimension en p, q, r seront nuls, et l'on aura

$$\varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$
$$+ \frac{1}{1.2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Dpq + 2Epr + 2Fqr) + \varepsilon,$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = A, \quad \frac{d^2\varphi}{d\beta^2} = B, \quad \frac{d^2\varphi}{d\gamma^2} = C,$$
$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha d\beta} = D, \quad \frac{d^2\varphi}{d\alpha d\gamma} = E, \quad \frac{d^2\varphi}{d\beta d\gamma} = F.$$

ε désigne l'ensemble des termes d'ordre supérieur au second, qu'il est inutile de développer. Nous supposons que le minimum de la fonction puisse être constaté par la considération des seuls termes du deuxième ordre; en sorte que le polynôme $(Ap^2 + Bq^2 + \ldots + 2Fqr)$ conserve constamment le signe $+$, quels que soient les signes et les grandeurs de p, q, r.

En prenant la variation de la fonction φ, et omettant les termes provenant de ε, lesquels contiendraient les carrés et les produits des variables p, q, r, supposées très-petites, on aura simplement

$$\delta\varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r) = (Ap + Dq + Er)\,\delta p + (Dp + Bq + Fr)\,\delta q$$
$$+ (Ep + Fq + Cr)\,\delta r.$$

Si l'on compare entre eux les groupes de termes qui multiplient δp, δq, δr dans le second membre de cette égalité, on remarquera que les coefficients des variables qui entrent dans un groupe se répètent tous une fois dans les autres groupes, à l'exception du coefficient de la variable soumise au signe δ dans ce même groupe, lequel ne se répète pas. Par exemple, les coefficients D et E du premier groupe qui est affecté de δp, se retrouvent une fois dans les autres groupes, savoir, D dans le second groupe et E dans le troisième, et, de plus, ils multiplient précisément la variable p dans ces groupes. Mais le coefficient A n'est pas

répété. Cette remarque, qui nous sera utile plus loin, subsiste évidemment quel que soit le nombre des variables indépendantes.

Considérons actuellement le premier membre de l'équation (2). On a, pour chaque coordonnée, un développement en série de la forme

$$\begin{aligned} x &= a + a_1 p + a_2 q + a_3 r + \zeta, \\ y &= b + b_1 p + b_2 q + b_3 r + \eta, \\ z &= c + c_1 p + c_2 q + c_3 r + \theta, \\ x' &= a' + a'_1 p + a'_2 q + a'_3 r + \zeta', \\ &\text{etc.;} \end{aligned}$$

ζ, η, θ, ζ',... désignent l'ensemble des termes du deuxième ordre et des ordres supérieurs. Les coefficients a, a_1, a_2,..., b, b_1,... etc., sont des constantes données.

On en déduira les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, et aussi celles de δx, dy, δz; et l'on négligera les termes qui proviendront des restes ζ, η, θ,..., parce que, dans les produits $\frac{d^2x}{dt^2}\delta x$, $\frac{d^2y}{dt^2}\delta y$, etc., ces termes introduiraient les carrés et les produits de p, q, r, et de leurs dérivées, que nous sommes convenus de négliger. On aura ainsi

$$\begin{aligned} \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) &= \left(A'\frac{d^2p}{dt^2} + D'\frac{d^2q}{dt^2} + E'\frac{d^2r}{dt^2}\right)\delta p \\ &+ \left(D'\frac{d^2p}{dt^2} + B'\frac{d^2q}{dt^2} + F'\frac{d^2r}{dt^2}\right)\delta q + \left(E'\frac{d^2p}{dt^2} + F'\frac{d^2q}{dt^2} + C'\frac{d^2r}{dt^2}\right)\delta r, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} &\sum m(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = A', && \sum m(a_1a_2 + b_1b_3 + c_1c_2) = D', \\ &\sum m(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) = B', && \sum m(a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3) = E', \\ &\sum m(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2) = C', && \sum m(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3) = F'. \end{aligned}$$

Il y a, sur la composition des groupes qui multiplient δp, δq, δr dans le deuxième membre de l'équation ci-dessus, une remarque analogue à celle que nous avons faite plus haut. Chaque coefficient se trouve

répété deux fois, à l'exception du coefficient de la dérivée de la variable soumise au signe δ dans le groupe que l'on considère. Ainsi, par exemple, les coefficients D′ et E′ du premier groupe en δp se retrouvent, l'un dans le deuxième groupe, l'autre dans le troisième, et ils y multiplient précisément les dérivées de la variable p. Ce fait est général, et a lieu quel que soit le nombre des variables indépendantes.

Les deux membres de l'équation (2) étant ainsi transformés, on devra égaler séparément les coefficients de chacune des variations indépendantes δp, δq, δr, que ces deux membres renferment. Il en résultera des équations linéaires à coefficients constants, en même nombre que les variables indépendantes p, q, r, et propres à déterminer par approximation ces variables en fonction du temps, du moins tant qu'elles resteront très-petites.

Ces équations sont ici au nombre de trois, savoir :

$$(3)\quad \begin{cases} A'\dfrac{d^2p}{dt^2} + D'\dfrac{d^2q}{dt^2} + E'\dfrac{d^2r}{dt^2} - Ap - Dq - Er = 0, \\[2ex] D'\dfrac{d^2p}{dt^2} + B'\dfrac{d^2q}{dt^2} + F'\dfrac{d^2r}{dt^2} - Dp - Bq - Fr = 0, \\[2ex] E'\dfrac{d^2p}{dt^2} + F'\dfrac{d^2q}{dt^2} + C'\dfrac{d^2r}{dt^2} - Ep - Fq - Cr = 0. \end{cases}$$

En rapprochant les deux remarques que nous avons faites ci-dessus, on peut dire que tout coefficient de l'une de ces équations se retrouve dans l'une des autres, à l'exception des deux coefficients relatifs à la variable p dans la première équation, à la variable q dans la deuxième, à la variable r dans la troisième, lesquels ne sont pas répétés. De plus, les coefficients relatifs à une variable, et susceptibles de répétition, dans l'une des équations, deviennent, dans les autres équations, coefficients relatifs à la variable pour laquelle il n'y avait pas répétition dans l'équation d'où l'on est parti.

Nous allons maintenant démontrer que, dans le cas où la fonction φ est un minimum, les valeurs de p, q, r, qui vérifient ces équations, ne sauraient demeurer toujours très-petites, quelle qu'ait été leur petitesse dans l'origine. Il en faudra conclure que l'hypothèse d'un mouvement oscillatoire dans lequel les points du système resteraient

toujours très-voisins de leurs positions d'équilibre, est inadmissible, et par conséquent que l'équilibre est instable.

On sait qu'on satisfait aux équations (3) par des valeurs de la forme

$$p = k\mathrm{H}\sin(t\sqrt{\rho} - h), \quad q = k'\mathrm{H}\sin(t\sqrt{\rho} - h), \quad r = k''\mathrm{H}\sin(t\sqrt{\rho} - h),$$

H et h étant des constantes arbitraires, et l'on a, pour déterminer ρ et les rapports $\frac{k'}{k}$, $\frac{k''}{k}$, les trois équations

$$(4)\quad \begin{cases} \rho(\mathrm{A}'k + \mathrm{D}'k' - \mathrm{E}'k'') - (\mathrm{A}k + \mathrm{D}k' - \mathrm{E}k'') = 0, \\ \rho(\mathrm{D}'k + \mathrm{B}'k' - \mathrm{F}'k'') - (\mathrm{D}k + \mathrm{B}k' - \mathrm{F}k'') = 0, \\ \rho(\mathrm{E}'k - \mathrm{F}'k' + \mathrm{C}'k'') + (\mathrm{E}k + \mathrm{F}k' + \mathrm{C}k'') = 0. \end{cases}$$

De deux d'entre elles, on déduira les valeurs des rapports $\frac{k'}{k}$, $\frac{k''}{k}$, sous forme de fonctions rationnelles contenant la deuxième puissance de ρ, et la substitution de ces valeurs dans la troisième équation fournira une équation en ρ du troisième degré. En général, cette équation en ρ sera d'un degré marqué par le nombre des variables qui servent à déterminer la position du système. A chacune des racines de cette équation correspondra un système de valeurs des rapports $\frac{k'}{k}$, $\frac{k''}{k}$; on pourra prendre, pour la symétrie, k égal au dénominateur commun de ces rapports. De cette manière, on aura trois systèmes de valeurs particulières pour p, q, r, et il ne restera qu'à en faire la somme (en affectant dans chaque système les constantes arbitraires H et h d'un caractère différent) pour avoir les intégrales générales des équations (3). Quant aux six constantes arbitraires, on les déterminera au moyen des valeurs données de p, q, r, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ pour $t = 0$; comme ces dernières sont supposées très-petites, il est visible que les valeurs de H le seront aussi; et, par suite, les valeurs de p, q, r seront très-petites, du moins au commencement du mouvement, ainsi que cela devait être.

Or, sans prendre la peine de composer l'équation en ρ, on peut s'assurer aisément qu'elle n'aura pas de racines *réelles et positives;* et cela suffira pour prouver l'instabilité de l'équilibre. Car alors les valeurs de $\sqrt{\rho}$ étant toutes imaginaires, les sinus qui entrent dans les

expressions de p, q, r se transformeront *tous* en exponentielles réelles, et, par suite, les valeurs générales de p, q, r se composeront de termes de la forme

$$(Re^{\omega t} + Se^{-\omega t}),$$

où nous désignons par ω l'une des valeurs de $\sqrt{-\rho}$, et par R et S des constantes qui dépendent du déplacement initial du système. Si R n'est pas nul, le terme ci-dessus finira par croître indéfiniment avec t. Ainsi, à moins qu'on ne suppose le cas tout à fait exceptionnel d'un déplacement initial présentant cette circonstance singulière que tous les coefficients, tels que R, des termes à exposants positifs, soient nuls, on sera certain que les valeurs des variables p, q, r cesseront d'être très-petites au bout d'un certain temps. Le système tendra donc toujours à s'éloigner davantage de sa position d'équilibre, quel que soit l'ébranlement initial; sauf toutefois le cas unique que nous venons de signaler, et où l'analyse précédente ne permet pas d'affirmer qu'il y ait instabilité.

La question est ramenée à prouver que l'équation en ρ n'a pas de racines réelles et positives; à cet effet, nous allons mettre les équations (4) sous une autre forme: désignons par T ce que devient la demi-somme des forces vives des points du système, c'est-à-dire la fonction $\frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)$, quand on y remplace $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ par les valeurs suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = a_1 k + a_2 k' + a_3 k'',$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1 k + b_2 k' + b_3 k'',$$

$$\frac{dz}{dt} = c_1 k + c_2 k' + c_3 k'',$$

nous aurons

$$T = \tfrac{1}{2}(A'k^2 + B'k'^2 + C'k''^2 + 2D'kk' + 2E'kk'' + 2F'k'k'').$$

Soit encore V ce que devient le polynôme du deuxième ordre de la fonction des forces, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + \ldots)$, quand on y remplace p, q, r respectivement par k, k', k'', en sorte que

$$V = \tfrac{1}{2}(Ak^2 + Bk'^2 + Ck''^2 + 2Dkk' + 2Ekk'' + 2Fk'k'').$$

Il suit des remarques que nous avons faites sur la composition des équations (4), que les coefficients de ρ dans ces équations ne sont autres que les dérivées partielles de T relatives à k, k', k'', et que les groupes indépendants de ρ ne sont autres que les dérivées partielles de V relatives aux mêmes quantités. Les équations (4) peuvent donc s'écrire ainsi :

$$\rho \frac{dT}{dk} + \frac{dV}{dk} = 0,$$

$$\rho \frac{dT}{dk'} + \frac{dV}{dk'} = 0,$$

$$\rho \frac{dT}{dk} + \frac{dV}{dk''} = 0,$$

et si on les ajoute, après les avoir multipliées respectivement par k, k', k'',..., on aura, vu que T et V sont des fonctions homogènes du deuxième degré,

$$\rho T + V = 0, \quad \text{d'ou} \quad \rho = -\frac{V}{T}.$$

Cette formule renferme la démonstration de la proposition énoncée. En effet, remarquons que les valeurs réelles de ρ doivent correspondre à des valeurs réelles de k, k', k''; et qu'en supposant k, k', k'' réelles, les fonctions T et V sont essentiellement positives, savoir : la fonction T par sa définition même, puisqu'elle provient d'une somme de carrés de quantités réelles, et la fonction V à cause que $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ est un minimum. Donc les valeurs réelles de ρ sont négatives.

Il nous a suffi, pour établir l'instabilité de l'équilibre, de démontrer que l'équation finale en ρ ne saurait admettre de racines réelles positives.

M. Sturm a soumis les racines de cette équation à une discussion approfondie. Après avoir établi que toutes ces racines sont *réelles et inégales* (ce qu'avait déjà fait Laplace, d'une manière moins simple, dans un chapitre de la *Mécanique céleste*), M. Sturm a fourni le moyen de les séparer, et a fait connaître plusieurs propriétés remarquables qu'elles possèdent. Un extrait seulement de ce Mémoire important a été inséré dans le *Bulletin de Férussac* (octobre 1829).

Sur le principe du dernier multiplicateur et sur son usage comme nouveau principe général de mécanique;

PAR M. JACOBI.

(Article traduit de l'italien et extrait *dal Giornale arcadico*)

I.

Je démontrerai d'abord un lemme de calcul intégral, lemme important par ses applications à la recherche des intégrales d'un système d'équations différentielles, et en particulier des équations auxquelles on ramène la détermination du mouvement d'un système de points matériels.

Lemme. « Soient X, X_1, X_2,..., X_n des fonctions quelconques des variables x, x_1,..., » x_n; et M et u deux autres fonctions des mêmes variables qui vérifient les équations » aux différences partielles suivantes :

$$\frac{d.\mathrm{MX}}{dx} + \frac{d.\mathrm{MX}_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.\mathrm{MX}_n}{dx_n} = 0,$$

$$\mathrm{X}\frac{du}{dx} + \mathrm{X}_1\frac{du}{dx} + \ldots + \mathrm{X}_n\frac{du}{dx_n} = 0$$

Posons

$$u = \alpha,$$

α étant une constante arbitraire; et de cette équation tirons la valeur de x_n pour la substituer dans les fonctions X, X_1,..., X_{n-1} et dans la quantité

$$\mathrm{M}_1 = \frac{\mathrm{M}}{\left(\frac{du}{dx_n}\right)}.$$

La fonction M_1 des variables x, x_1,..., x_{n-1} vérifiera une équation analogue à celle à laquelle satisfait M, savoir :

$$\frac{d.\mathrm{M}_1\mathrm{X}}{dx} + \frac{d.\mathrm{M}_1\mathrm{X}_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.\mathrm{M}_1\mathrm{X}_{n-1}}{dx_{n-1}} = 0. \text{ »}$$

Démonstration. L'équation à démontrer,

$$\frac{d.\mathrm{MX}}{dx} + \frac{d.\mathrm{MX}_1}{dx} + \ldots + \frac{d.\mathrm{MX}_{n-1}}{dx_{n-1}} = 0,$$

peut se mettre sous la forme

$$X\frac{d.\log M_1}{dx}+X_1\frac{d.\log M_1}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{d.\log M_1}{dx_{n-1}}$$
$$+\frac{dX}{dx}+\frac{dX_1}{dx_1}+\ldots+\frac{dX_{n-1}}{dx_{n-1}}=0.$$

Les quantités X, $X_1,\ldots,X_{n-1}$ et M_1, qui sont regardées comme fonctions des variables indépendantes $x, x_1,\ldots,x_{n-1}$, contiennent cependant dans leur expression primitive la variable x_n qui dépend des autres en vertu de l'équation

$$u=\alpha.$$

En conservant donc cette forme primitive, l'équation précédente devra être écrite ainsi :

$$\left\{\begin{aligned}&X\frac{d.\log M_1}{dx}+X_1\frac{d.\log M_1}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{d.\log M_1}{dx_{n-1}}\\&+\frac{d.\log M_1}{dx_n}\left(X\frac{dx_n}{dx}+X_1\frac{dx_n}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right)\\&+\frac{dX}{dx}+\frac{dX_1}{dx_1}+\ldots+\frac{dX_{n-1}}{dx_{n-1}}\\&+\frac{dX}{dx_n}\frac{dx_n}{dx}+\frac{dX_1}{dx_1}\frac{dx_1}{dx}+\ldots+\frac{dX_{n-1}}{dx_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dx}=0.\end{aligned}\right.$$

Les valeurs des dérivées partielles

$$\frac{dx_n}{dx},\quad\frac{dx_n}{dx_1},\ldots,$$

se déduisent de l'équation

$$u=\alpha,$$

au moyen de la formule

$$\frac{dx_1}{dx_n}=-\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dx_n}\right)}.$$

Ainsi on aura

$$X\frac{dx_1}{dx}+X_1\frac{dx_1}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{dx_1}{dx_{n-1}}$$
$$=-\frac{1}{\left(\frac{du}{dx_n}\right)}\left(X\frac{du}{dx}+X_1\frac{du}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{du}{dx_{n-1}}\right).$$

Ainsi on aura

$$X\frac{du}{dx}+X_1\frac{du}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{du}{dx_{n-1}}=0.$$

il viendra donc

$$(2)\qquad X\frac{dx_1}{dx} + X\frac{dx_2}{dx} + \ldots + X_{n-1}\frac{dx_n}{dx_{n-1}} = X_n.$$

En outre, on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dX}{dx_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{dX}{dx_2}\frac{dx_2}{dx} + \ldots + \frac{dX_{n-1}}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_1} \\ &= -\frac{1}{\left(\frac{du}{dx_1}\right)}\left(\frac{dX_n}{dx_1}\frac{du}{dx} + \frac{dX_1}{dx}\frac{du}{dx} + \ldots + \frac{dX_{n-1}}{dx_1}\frac{du}{dx_{n-1}}\right). \end{aligned}\right.$$

Or l'équation

$$-\left(X\frac{du}{dx} + X_1\frac{du}{dx} + \ldots + X_{n-1}\frac{du}{dx_{n-1}}\right) = X_1\frac{du}{dx_1},$$

différentiée par rapport à x_1 et divisée par $\frac{du}{dx_1}$, fournit

$$-\frac{1}{\left(\frac{du}{dx_1}\right)}\left(\frac{dX}{dx_1}\frac{du}{dx} + \frac{dX_1}{dx_1}\frac{du}{dx} + \ldots + \frac{dX_{n-1}}{dx_1}\frac{dx_{n-1}}{dx_1}\right)$$

$$= \frac{dX_1}{dx_1} + X\frac{d.\log\frac{du}{dx_1}}{dx} + X_1\frac{d.\log\frac{du}{dx_1}}{dx} + \ldots$$

$$+ X_{n-1}\frac{d.\log\frac{du}{dx_1}}{dx_{n-1}} + X_1\frac{d.\log\frac{du}{dx_1}}{dx_1}.$$

d'où, par la formule (3), résulte

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dX}{dx_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{dX_1}{dx_n}\frac{dx_n}{dx} + \ldots + \frac{dX_{n-1}}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_1} \\ &= \frac{dX_1}{dx_1} + X\frac{d.\log\frac{du}{dx_1}}{dx} + X_1\frac{d.\log\frac{du}{dx_1}}{dx} + \ldots + X_{n-1}\frac{d.\log\frac{du}{dx_1}}{dx_1}. \end{aligned}\right.$$

Combinant les formules (2) et (4) avec la formule (1), on obtient

$$0 = X\frac{d.\log M}{dx} + X_1\frac{d.\log M}{dx} + \ldots + X_{n-1}\frac{d.\log M}{dx}$$

$$+ X\frac{d.\log\frac{du}{dx_1}}{dx} + X_1\frac{d.\log\frac{du}{dx_1}}{dx} + \ldots + X_{n-1}\frac{d.\log\frac{du}{dx_1}}{dx_1}$$

$$+ \frac{dX}{dx} + \frac{dX_1}{dx} + \ldots + \frac{dX_{n-1}}{dx} + \frac{dX_1}{dx_1},$$

et, comme

$$M_1 \frac{du}{dx_n} = M,$$

on en conclut

$$0 = X \frac{d.\log M}{dx} + X_1 \frac{d.\log M}{dx_1} + \ldots + X_n \frac{d.\log M}{dx_n}$$
$$+ \frac{dX}{dx} + \frac{dX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n},$$

formule qui, multipliée par M, se change en

$$0 = \frac{d.MX}{dx} + \frac{d.MX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.MX_n}{dx_n}.$$

Ainsi l'équation à démontrer se trouve réduite à l'équation même qui sert à définir la fonction M. Le lemme est donc démontré.

Ayant

$$X \frac{du}{dx} + X_1 \frac{du}{dx_1} + \ldots + X_n \frac{du}{dx_n} = 0,$$

on peut définir l'équation

$$u = \alpha$$

comme étant une intégrale première du système des équations différentielles ordinaires

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n;$$

c'est ce que nous ferons désormais.

II.

De la même manière qu'on a déduit de M la fonction M_1, on pourra de M_1 déduire une nouvelle fonction M_2, puis de M_2 une autre fonction M_3, etc. Et le lemme précédent fournira successivement pour chacune de ces fonctions une équation aux différences partielles à laquelle elle devra satisfaire, le nombre des variables diminuant à chaque fois d'une unité.

Admettons que $u = \alpha$ soit une intégrale du système d'équations ordinaires

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

et qu'on ait

$$\frac{d.MX}{dx} + \frac{d.MX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.MX_n}{dx_n} = 0;$$

la fonction

$$M_1 = \frac{M}{\left(\frac{du}{dx_n}\right)}$$

satisfera à l'équation

$$\frac{d.M_1X}{dx} + \frac{d.M_1X_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.M_1X_{n-1}}{dx_{n-1}} = 0,$$

où, par le moyen de l'équation

$$u = \alpha,$$

on suppose la variable x_n éliminée de $X, X_1, \ldots, X_{n-1}, M_1$.

Soit $u_1 = \alpha_1$ une intégrale des équations différentielles

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 : \ldots : X_{n-1},$$

α_1 désignant une nouvelle constante arbitraire; et posons

$$M_2 = \frac{M_1}{\left(\frac{du}{dx_{n-1}}\right)};$$

on aura, par le même théorème,

$$\frac{d.M_2X}{dx} + \frac{d.M_2X_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.M_2X_{n-2}}{dx_{n-2}} = 0,$$

où $X, X_1, \ldots, X_{n-2}, M_2$ sont des fonctions de $x, x_1, \ldots, x_{n-2}$, la variable x_{n-1} ayant été éliminée au moyen de la seconde intégrale $u_1 = \alpha_1$.

Soient α_2 une troisième constante arbitraire et $u_2 = \alpha_2$ une intégrale des équations différentielles

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_{n-2} = X : X_1 : \ldots : X_{n-2},$$

et posons

$$M_3 = \frac{M_2}{\frac{du_2}{dx_{n-2}}} = \frac{M_1}{\frac{du}{dx_{n-2}} \cdot \frac{du_1}{dx_{n-1}}} = \frac{M}{\frac{du_2}{dx_{n-2}} \cdot \frac{du_1}{dx_{n-1}} \cdot \frac{du}{dx}};$$

en éliminant x_{n-2} au moyen de l'équation $u_2 = \alpha_2$, on aura

$$\frac{d.M_3X}{dx} + \frac{d.M_3X_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.M_3X_{n-3}}{dx_{n-3}} = 0.$$

En continuant de cette manière, soient les intégrales successives

$$(5) \qquad u = \alpha, \quad u_1 = \alpha_1, \ldots, \quad u_{n-2} = \alpha_{n-2},$$

où $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ sont les constantes arbitraires, et où $u_i = \alpha_i$ est l'équation en $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-i}$ qui doit servir à éliminer x_{n-i}. Posons, en outre,

$$(6) \qquad M_{n-1} = \frac{M}{\frac{du}{dx_n} \cdot \frac{du_1}{dx_{n-1}} \cdots \frac{du_{n-2}}{dx_2}},$$

et l'élimination de $x_2, x_3, \ldots, x_n$ étant opérée au moyen des intégrales citées dans X, X_1

et M_{n-1}, l'application répétée du lemme que nous avons démontré nous donnera

$$(7)\qquad \frac{d.M_{n-1}X}{dx} + \frac{d.M_{n-1}X}{dx_1} = 0.$$

Or, quand les variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ont été éliminées par le moyen des intégrales (5), c'est-à-dire de toutes les intégrales du problème sauf une seule, il ne reste plus à intégrer qu'une équation différentielle du premier ordre et à deux variables x_1, x_2, savoir, l'équation

$$(8)\qquad X_1\,dx - X\,dx_1 = 0;$$

et la formule (7) prouve que la quantité M_{n-1} est le *multiplicateur* de cette équation différentielle. Ce multiplicateur rendant le premier membre de l'équation (8) une différentielle exacte, réduit l'intégration de cette équation à une simple quadrature. De là découle le théorème suivant qui, par son importance et sa fécondité, a paru mériter une dénomination particulière :

« Étant proposées les équations différentielles

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

» soit M une quantité satisfaisant à l'équation

$$\frac{d.MX}{dx} + \frac{d.MX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.MX_n}{dx_n} = 0;$$

» admettons qu'on ait trouvé toutes les intégrales à l'exception d'une seule, et repré-
» sentons par

$$u = \alpha, \quad u_1 = \alpha_1, \ldots, \quad u_{n-2} = \alpha_{n-2},$$

» les intégrales qui nous sont connues, $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ étant les constantes arbitraires ;
» faisons servir successivement chacune de ces intégrales à l'élimination d'une variable,
» et que $u_i = \alpha_i$ soit l'équation en $x, x_1, \ldots, x_{n-i}$, qui sert à éliminer x_{n-i} ; le multipli-
» cateur de la dernière équation différentielle

$$X_1\,dx - X\,dx_1 = 0$$

» sera

$$\mu = \frac{M}{\dfrac{du}{dx_n}\cdot\dfrac{du_1}{dx_{n-1}}\cdots\dfrac{du_n}{dx_2}}.$$

» expression où, par le secours des intégrales trouvées, il n'entre plus que les deux variables x et x_1. »

Ainsi est démontré le principe du dernier multiplicateur, que *connaissant la quantité* M, *la dernière intégration s'effectue toujours par une simple quadrature.*

Quand on a

$$(9)\qquad \frac{dX}{dx} + \frac{dX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n} = 0.$$

on peut prendre $M = 1$; d'où il suit : « Qu'étant proposé ce système d'équations différentielles ordinaires

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

» où

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n} = 0,$$

» et dont toutes les intégrales sont connues à l'exception d'une seule, la dernière équation différentielle qui reste à traiter pourra toujours être intégrée à l'aide d'une simple quadrature. »

On trouvera dans le *Journal de M. Crelle* [*] des développements plus étendus sur ce sujet. Passons à l'application aux problèmes de mécanique.

III.

Principe du dernier multiplicateur dans les problèmes de mécanique.

Considérons les formules de dynamique relatives au mouvement de k points matériels. Les $3k$ coordonnées rectangulaires de ces k points étant

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_{3k-1},$$

posons, en outre,

$$(10) \qquad \frac{dx}{dt} = x_{3k}, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_{3k+1}, \ldots, \quad \frac{dx_{3k-1}}{dt} = x_n,$$

où

$$n = 6k - 1.$$

Admettons que les forces qui sollicitent les points matériels suivant des directions parallèles aux axes des coordonnées sont des fonctions des coordonnées $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$, indépendantes du temps et des vitesses; supposons, de plus, les points entièrement libres. Le mouvement de ces points dépendra du système suivant d'équations différentielles ordinaires,

$$(11) \qquad \frac{dx_{3k}}{dt} = X_{3k}, \quad \frac{dx_{3k+1}}{dt} = X_{3k+1}, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

$X_{3k}, X_{3k+1}, \ldots, X_n$ étant des fonctions de $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$. Pour rendre ces formules encore plus semblables à celles des articles précédents, posons

$$x_{3k} = X, \quad x_{3k+1} = X_1, \ldots, \quad x_n = X_{n-3k}.$$

Les formules (10) et (11) réunies conduisent à ce système d'équations différentielles du

* Tomes XXVII et XXIX. Le Mémoire auquel l'auteur renvoie est intitulé : [illegible] du dernier multiplicateur [illegible]

premier ordre,

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n, \tag{12}$$

après l'intégration duquel on pourra exprimer X en fonction de x seule et trouver le temps t par la formule

$$t = \int \frac{dx}{X} + \text{constante}. \tag{13}$$

De là ce résultat connu que, dans les problèmes de dynamique, la dernière intégrale qui fournit le temps en fonction des coordonnées dépend d'une simple quadrature. Mais je dis que les *deux* dernières intégrales peuvent s'obtenir par des quadratures, et qu'outre l'intégrale (13) où il en entre une, on peut obtenir par le principe du dernier multiplicateur une autre intégrale, savoir, la dernière intégrale du système (12). En effet, $X_{3k}, X_{3k+1}, \ldots, X_n$ étant des fonctions de $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$ seulement, et les quantités $X, X_1, \ldots, X_{3k-1}$ étant égales aux variables $x_{3k}, x_{3k+1}, \ldots, x_n$, on voit que la fonction X_i ne contient jamais x_i, et que, par suite, on a, pour chaque valeur de i,

$$\frac{dX_i}{dx_i} = 0.$$

De là

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n} = 0.$$

Nous sommes donc dans le cas où l'on peut prendre $M = 1$. Partant, dès que l'on connaîtra toutes les intégrales, excepté une, du système (12), le multiplicateur de l'équation différentielle restante sera donné par la formule du dernier multiplicateur en y posant $M = 1$.

Le principe relatif aux deux dernières intégrales subsiste encore pour un système de points liés entre eux. Cela deviendra manifeste en écrivant, comme on va le voir, les équations de la dynamique sous une forme convenable.

Soit $3k - m$ le nombre des équations de condition pour notre système de k points matériels; exprimons les $3k$ coordonnés $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$ par m quantités indépendantes

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_m;$$

posons ensuite

$$\frac{dq_i}{dt} = q'_i;$$

la force vive T du système pourra s'exprimer par les quantités

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_m, \quad q'_1, \quad q'_2, \ldots, \quad q'_m.$$

Maintenant posons les équations

$$\frac{dT}{dq'_1} = p_1, \quad \frac{dT}{dq'_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{dT}{dq'_m} = p_m,$$

lesquelles sont linéaires par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$; résolvons-les et tirons-en les valeurs de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_m$, puis substituons ces valeurs dans T qui deviendra ainsi fonction de

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_m, \quad p_1, \quad p_2, \ldots, \quad p_m,$$

variables qu'il convient d'employer dans les problèmes de dynamique. Pour obtenir les équations qui s'y rapportent, concevons que x_i soit une des coordonnées du point où se trouve la masse m_i, et que ce point soit sollicité dans le sens des x_i par la force X_{3k+i}. En substituant les valeurs des coordonnées $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$ exprimées par $q_1, q_2, \ldots, q_m$, nous obtiendrons

$$m X_k dx + m_1 X_{k+1} dx + \ldots + m_{k-1} X_n dx_{k-1} = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \ldots + Q_m dq_m.$$

Les quantités $X_{3k}, X_{3k+1}, \ldots$ étant fonctions de $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$ seulement, les quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ seront des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_m$; et les équations différentielles relatives à $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ s'écriront ainsi :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{dT}{dp_1}, & \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{dT}{dq_1} + Q_1, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{dT}{dp_2}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{dT}{dq_2} + Q_2, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dq_m}{dt} = \dfrac{dT}{dp_m}, & \dfrac{dp_m}{dt} = -\dfrac{dT}{dq_m} + Q_m. \end{array} \right.$$

La démonstration de ces formules générales peut se déduire de celle que M. Hamilton a donnée dans le cas où

$$m X_k dx + m_1 X_{k+1} dx_1 + \ldots + m_{k-1} X_n dx_{k-1}$$

est une différentielle exacte (*voyez* deux Mémoires que cet auteur a insérés dans les *Transactions philosophiques*, années 1834 et 1835). En éliminant l'élément dt, on les mettra sous la forme d'une proportion, savoir,

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m \\ : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_m \\ = \dfrac{dT}{dp_1} : \dfrac{dT}{dp_2} : \ldots : \dfrac{dT}{dp_m} \\ : -\dfrac{dT}{dp_1} + Q_1 : \ldots : -\dfrac{dT}{dq_m} + Q_m. \end{array} \right.$$

On aura d'abord à intégrer les équations (15); ensuite le temps s'exprimera en fonction d'une seule des variables $q_1, q_2, \ldots, q_m$ par une simple quadrature. Recherchons donc la quantité M qui répond au système des équations (15). Or, quand il s'agissait du système d'équations

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

nous avons pris la dérivée de chaque fonction $X, X_1, \ldots, X_n$ par rapport à la variable à la différentielle de laquelle cette fonction est proportionnelle. Et la somme des dérivées en question étant nulle, nous en avons conclu que la dernière intégration se réduit à une simple quadrature. Dans les équations (15), prenons de même les dérivées de

$$\frac{dT}{dp_1}, \quad \frac{dT}{dp_2}, \ldots, \quad \frac{dT}{dp_m},$$

par rapport aux variables respectives

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_m,$$

et les dérivées de

$$-\frac{dT}{dq_1} + Q_1, \quad -\frac{dT}{dq_2} + Q_2, \ldots, \quad -\frac{dT}{dq_m} + Q_m,$$

respectivement aussi par rapport à

$$p_1, \quad p_2, \ldots, \quad p_m.$$

Or la somme de ces $2m$ dérivées s'évanouit encore, parce qu'en les combinant deux à deux on a pour toutes les valeurs de l'indice i,

$$\frac{d.\frac{dT}{dp_i}}{dq_i} + \frac{d\left(-\frac{dT}{dq_i} + Q_i\right)}{dp_i} = \frac{dQ_i}{dp_i} = 0.$$

Donc étant proposées les équations différentielles (15) relatives à un système de points liés entre eux, on pourra encore prendre $M = 1$, et par conséquent la dernière intégration s'effectuera par une simple quadrature.

Quand l'expression des forces contient explicitement le temps t, on ne peut plus obtenir, comme ci-dessus, la valeur de t à l'aide d'une simple quadrature. Mais, du moins, à l'aide du nouveau principe, on réduira aux quadratures l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre qui restera à la fin entre t et une des coordonnées.

Le même principe s'applique aussi au mouvement d'une comète dans un milieu résistant et à quelques cas particuliers du même genre.

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. AUGUSTE MIQUEL.

(DEUXIÈME PARTIE.)

ANGLES CURVILIGNES, INTERSECTIONS DES CERCLES ET DES SPHÈRES.

I.

Dans la première partie de ce Mémoire (*voir* le tome IX de ce Journal, page 20), j'ai prouvé que, lorsque quatre circonférences de cercle tracées sur un plan se coupent consécutivement deux à deux sur une même circonférence de cercle, les quatre autres points d'intersection de ces mêmes circonférences se trouvent sur une sixième circonférence de cercle. Je vais faire voir que cette proposition est encore vraie lorsque la figure est tracée sur une surface de sphère. Auparavant, je démontrerai le théorème suivant de M. Guénaud d'Aumont : *Lorsqu'un quadrilatère, formé sur la surface d'une sphère par quatre arcs de cercle, est inscrit à une circonférence, la somme de deux angles opposés est égale à celle des deux autres.* Soient, en effet, ab, bc, cd, da les arcs de cercle qui forment le quadrilatère inscrit à la circonférence $abcd$; il est évident que la somme des trois angles formés à chacun de ses sommets dans l'intérieur de cette circonférence est égale à deux angles droits; donc la somme des six angles formés aux sommets opposés a et c est égale à la somme des six autres angles formés aux points b et d; retranchant de part et d'autre les angles qui sont égaux comme symétriques, on a la somme des angles $a + c$ du quadrilatère curviligne égale à la somme des deux autres $b + d$.

Pour démontrer la réciproque du théorème précédent, supposons qu'on ait un quadrilatère curviligne A′B′C′D′ (*fig.* 2 de la première partie) dans lequel la somme de deux angles opposés soit égale à celle des deux autres; faisons passer une circonférence de cercle par les trois points A′, D′, C′, et prolongeons les arcs de cercle suffisamment;

il est clair que la somme des trois angles adjacents formés au point A′ intérieurement à la circonférence C′A′D′ égale deux droits, et qu'il en est de même de la somme des trois angles intérieurs formés au point C′; remplaçant dans la somme de ces six angles la somme des deux angles A′ et C′ du quadrilatère A′B′C′D′ par la somme des deux autres qui leur est égale par hypothèse, et retranchant ensuite du résultat, qui est toujours égal à quatre angles droits, la somme des trois angles du triangle A′C′D dont les trois côtés passent par un même point D′, en ayant égard à l'égalité des angles symétriques et à celle des angles opposés par le sommet, on trouve que la somme des trois angles intérieurs du triangle A′BC′ égale deux droits. Donc, d'après une proposition démontrée dans la première partie de ce Mémoire, les trois arcs de cercle qui forment ce triangle se coupent en un même point B′, et par suite, la circonférence A′D′C′ passant par le point B′, on voit que, réciproquement, un quadrilatère tracé sur une surface plane ou sphérique est inscriptible à une circonférence de cercle lorsque la somme de deux de ses angles opposés est égale à celle des deux autres.

Venons maintenant à l'extension qu'il s'agit de prouver (la *fig.* 2 de la première partie étant supposée tracée sur la surface d'une sphère), en supposant qu'on ait cercle ABCD, cercle AA′B′B, cercle BB′C′C, cercle CC′D′D et cercle DD′A′A, je dis qu'il en résultera cercle A′B′C′D′. En effet, de ce qu'on a cercle ABCD, il est clair que dans le quadrilatère AA′BB′CC′DD′A la somme des deux angles intérieurs formés aux points A et C est égale à la somme des deux angles D et B du même quadrilatere. Remplaçant chacun de ces angles par son symétrique, et celui-ci par son opposé au sommet, on voit que, dans le quadrilatère A′B′C′D′, la somme de deux angles opposés est égale à celle des deux autres; donc ce quadrilatère se trouve inscrit à une même circonférence de cercle; ce qu'il fallait démontrer.

II.

Le théorème précédent revient évidemment au suivant : *Lorsque trois circonférences de cercle* ABB′, CBB′, ACB *ont un point commun* B, *si, apres avoir pris trois points* A′, C′, D, *respectivement sur chacun des trois côtés du triangle curviligne* ACB′, *on fait passer une circonférence de cercle par chacun de ses sommets, et par chacun des points pris sur les*

côtés qui aboutissent à ce sommet, les trois circonférences AA'D, CC'D, B'C'A' *ainsi obtenues se couperont en un même point* D'.

Dans tout quadrilatère complet formé par quatre arcs de cercle qui, prolongés, se coupent en un même point, les circonférences de cercle circonscrites à chacun des quatre triangles qu'on obtient en faisant successivement abstraction d'un des côtés du quadrilatère se coupent toutes quatre en un même point. Soit le quadrilatère CSMNFA de la *fig.* 5 de la première partie, dont les côtés passent tous par le point I; je dis que les quatre circonférences FMN, ASM, ANC, CMF se coupent en un même point M'. La démonstration de ce théorème revient, au moyen de ce qui vient d'être dit précédemment, à celle que j'en ai donnée pour le quadrilatère rectiligne, dans le tome III de ce Journal, page 485.

Dans tout pentagone étoilé formé par des arcs de cercle qui, prolongés suffisamment, se coupent tous en un même point I, *les cinq circonférences de cercle circonscrites aux cinq triangles extérieurs* ASM, FMN, ENL, CLR, BRS, *se coupent consécutivement deux à deux en cinq points* N', L', R', S', M', *qui se trouvent sur une même circonférence de cercle* (*fig.* 5 de la première partie).

En effet, d'après le théorème précédent, le point M' d'intersection des deux circonférences consécutives FMN et ASM peut être considéré comme le point d'intersection des deux circonférences FMN et FSC; pareillement, le point R' peut être considéré comme l'intersection de la circonférence CLR avec la circonférence FSC. Or les quatre circonférences FMN, FSC, LRC, ENL se coupent consécutivement deux à deux en quatre points F, N, L, C qui sont évidemment sur une même circonférence de cercle; donc les quatre autres intersections M', R', L', N' sont sur une même circonférence de cercle.

On démontrerait absolument de la même manière que les quatre points S', R', L', N' sont sur une même circonférence; donc les cinq points M', N', L', R', S' sont sur une même circonférence de cercle.

La proposition précédente étant également vraie sur un plan et sur la surface de la sphère, comme dans le premier cas le point I peut passer à l'infini sans que les sommets M, N, L, R, S changent de position, auquel cas les côtés du pentagone deviennent des lignes droites, il en résulte le théorème analogue que j'ai déja démontré directement dans le tome III de ce Journal.

III.

Lorsque six sphères se coupent consécutivement trois à trois en huit points situés sur une même surface sphérique, leurs huit autres points d'intersection symétriques des premiers sont sur une huitième surface de sphère.

Les six circonférences de cercle de la *fig.* 2 de la première partie, étant supposées tracées sur une surface sphérique que j'appellerai S, supposons que par chacune d'elles on fasse passer une surface de sphère de rayon arbitraire, mais suffisamment grand. Ces sphères, qui peuvent être appelées sphère A′B′C′D′, sphère AA′B′B, etc., se coupent évidemment trois à trois sur la sphère S aux points A, B, C, D, A′, B′, C′, D′. Elles se couperont encore généralement en huit autres points de l'espace que je désignerai par a, b, c, d, a', b', c', d' sans les marquer sur la figure. Avec les huit premiers, ces points appartiendront évidemment deux à deux à trois mêmes sphères.

Cela posé, les quatre points a', b', c', d', par exemple, peuvent être considérés comme formés sur la sphère A′B′C′D′ par la rencontre des circonférences consécutives suivant lesquelles cette sphère A′B′C′D′ se trouve coupée par les sphères AA′B′B, BB′C′C, CC′D′D, DD′A′A. Or il est clair que ces quatre circonférences tracées sur la sphère A′B′C′D′ s'y coupent consécutivement en quatre points A′, B′, C′, D′ qui sont sur une circonférence de cercle A′B′C′D′; donc, d'après un des théorèmes précédents, les quatre autres intersections a', b', c', d' sont sur une même circonférence de cercle, ce que nous pouvons exprimer en disant qu'on a cercle $a'b'c'd'$. On obtiendrait, par des raisonnements analogues, cercle $abcd$, cercle $aa'b'b$, cercle $bb'c'c$,....

Imaginons maintenant une sphère qui passe par les quatre points a, a', b', c', elle passera encore par le point d'; car la circonférence $a'b'c'd'$ ayant trois points a', b', c' sur la surface sphérique, $aa'b'c'$ y est tout entière; donc on a sphère $aa'b'c'd'$. Par la même raison, ayant à la fois sphère $aa'b'c'd'$ et cercle $aa'b'b$, il en résulte sphère $aba'b'c'd'$; or on a cercle $bb'c'c$; on en déduit donc encore sphère $abca'b'c'd'$. On obtiendrait enfin de la même manière, à cause de cercle $cc'd'd$, sphère $abcda'b'b'c'd'$; ce qui démontre la proposition énoncée.

Développements sur une classe d'équations relatives à la représentation géométrique des fonctions elliptiques;

PAR M. J.-A. SERRET.

Je me suis proposé d'étudier ici avec attention les équations algébriques que j'ai désignées par

$$\Pi_m(\zeta) = 0$$

dans mon Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques. Les résultats auxquels je suis parvenu me semblent devoir intéresser les géomètres; on verra que les polynômes Π_m ont une analogie frappante avec les fonctions si remarquables résultant du développement de $(1 - 2\alpha\zeta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$. La forme que je trouve pour l'équation

$$\Pi_m(\zeta) = 0$$

est assez simple pour qu'on puisse reconnaître immédiatement la nature des racines, ce qui est essentiel dans l'analyse où j'en ai fait usage.

I.

Rappelons d'abord en peu de mots la formation des polynômes Π_m : soient

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)^m (z+a)^n}{(z+\alpha)^{n+}}, \quad \psi(z) = \frac{(z-a)^n (z+a)^m}{(z-\alpha)^{m+}}.$$

où a et α désignent des quantités quelconques, m et n des nombres entiers positifs; on démontre aisément l'identité

$$\frac{\varphi^m(\alpha)}{1.2\ldots m} + \frac{\psi^n(-\alpha)}{1.2\ldots n} = 0,$$

en sorte que les équations

$$\varphi^m(\alpha) = 0, \quad \psi^n(-\alpha) = 0$$

établissent entre a et α une relation unique. Si l'on suppose, ce qui est permis, que m ne soit pas supérieur à n, on trouve facilement

$$\varphi^m(\alpha) =$$

$$\frac{(\alpha - a)^{2m}}{(2\alpha)^{2m-n}} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)} \sum_{p=0}^{p=m} \sum_{q=0}^{q=m} (-1)^{p+q} \frac{\Gamma(n+m-p+1)\,\Gamma(n-m-q+1)}{\Gamma(m-p+1)\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(m-q+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(n+m-p-q+1)} (2\alpha)^p (2a)^q (\alpha-a)^{m-p-q},$$

en désignant toujours par

$$\Gamma(\mu)$$

le produit des $\mu - 1$ premiers nombres entiers.

Soit maintenant

$$\frac{(\alpha + a)^2}{4a\alpha} = \zeta,$$

et posons

$$\Pi_m(\zeta) =$$

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)} \sum_{p=0}^{p=m} \sum_{q=0}^{q=m} (-1)^{p+q} \frac{\Gamma(n+m-p+1)\,\Gamma(n+m-q+1)}{\Gamma(m-p+1)\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(m-q+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(n+m-p-q+1)} \frac{(2\alpha)^p (2a)^q (\alpha+a)^{2m-p-q}}{(4a\alpha)^m}$$

$\Pi_m(\zeta)$ sera une fonction entière et rationnelle de ζ, et du degré m, et l'on aura

$$\varphi^m(\alpha) = 2^{m-n-1} \frac{(\alpha + a)^{n-m} a^m}{\alpha^{n+1}} \Pi_m(\zeta).$$

Telle est la loi de formation des polynômes Π_m que nous allons étudier.

II.

De l'équation

$$\varphi(z) = \frac{(z - a)^m (z + a)^n}{(z + \alpha)^{n+1}}$$

on déduit par la différentiation

$$z^3 - \alpha z^2 - a^2 z - a^2\alpha\, \varphi'(z) = (m-1) z^2 + [(m-n)a + (m+n)\alpha] z + (m-n)a\alpha + (n+1)a^2 \} \varphi(z),$$

et si l'on différentie $m+2$ fois cette nouvelle équation, on aura

$$z^3+\alpha z^2-a^2z-a^2\alpha\,\varphi^{m+3}(z)+\frac{m+2}{1}(3z^2+2\alpha z-a^2)\,\varphi^{m+2}(z)$$
$$+\frac{(m+2)(m+1)}{1.2}(6z+2\alpha)\,\varphi^{m+1}(z)+\frac{(m+2)(m+1)m}{1.2.3}6\varphi^{m}(z)$$
$$=\{(m-1)z^2+[(m-n)a+(m+n)\alpha]z+(m-n)a\alpha+(n+1)a^2\}\,\varphi^{m+2}(z)$$
$$+\frac{m+2}{1}[2(m-1)z+(m-n)a+(m+n)\alpha]\,\varphi^{m+1}(z)$$
$$+\frac{(m+2)(m+1)}{1.2}2(m-1)\,\varphi^{m}(z);$$

équation que nous représentons, pour abréger, par

$$A\varphi^{m+3}(z)+B\varphi^{m+2}(z)+C\varphi^{m+1}(z)+D\varphi^{m}(z)=0,$$

en faisant

$$A=(z-a)(z+a)(z+\alpha),$$
$$B=(2m+7)z^2+[(m-n+4)\alpha-(m-n)a]z-(m+n+3)a^2-(m-n)a\alpha,$$
$$C=(m+2)[(m+5)z-(n+1)\alpha-(m-n)a],$$
$$D=(m+2)(m+1).$$

Si l'on fait maintenant $z=\alpha$, on aura

$$(1)\qquad A\varphi^{m+3}(\alpha)+B\varphi^{m+2}(\alpha)+C\varphi^{m+1}(\alpha)+D\varphi^{m}(\alpha)=0,$$

avec

$$(2)\qquad\begin{cases} A=(2\alpha-a)(\alpha^2-a^2),\\ B=(3m-n+11)\alpha^2-(2m-n)a\alpha-(m+n+3)a^2,\\ C=(m+2)[(m-n+6)\alpha-(m-n)a],\\ D=(m+2)(m+1).\end{cases}$$

III.

Désignons par $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, les valeurs que prend $\varphi(z)$ quand on change successivement m en $m+1$, $m+2$, $m+3$; on aura

$$\varphi_1(z)=(z-a)\,\varphi(z),$$
$$\varphi_2(z)=(z-a)^2\varphi(z),$$
$$\varphi_3(z)=(z-a)^3\varphi(z);$$

d'où l'on déduit très-aisément

$$\varphi^{m+1}(z) = \frac{\varphi_1^{m+1}(z) - (m+1)\varphi^m(z)}{z-a},$$

$$\varphi^{m+2}(z) = \frac{\varphi_2^{m+2}(z) - 2(m+2)\varphi_1^{m+1}(z) + (m+2)(m+1)\varphi^m(z)}{(z-a)^2},$$

$$\varphi^{m+3}(z) = \frac{\varphi_3^{m+3}(z) - 3(m+3)\varphi_2^{m+2}(z) + 3(m+3)(m+2)\varphi_1^{m+1}(z) - (m+3)(m+2)(m+1)\varphi^m(z)}{(z-a)^3}.$$

Faisant $z = \alpha$ dans ces équations, et portant ensuite dans l'équation (1) les valeurs qui en résultent pour $\varphi^{m+1}(\alpha)$, $\varphi^{m+2}(\alpha)$, $\varphi^{m+3}(\alpha)$, celle-ci deviendra

$$(3) \qquad M\varphi_3^{m+3}(\alpha) + N\varphi_2^{m+2}(\alpha) + P\varphi_1^{m+1}(\alpha) + Q\varphi^m(\alpha) = 0,$$

en faisant, pour abréger,

$$M = \frac{A}{\alpha - a},$$

$$N = -3(m+3)\frac{A}{\alpha - a} + B,$$

$$P = 3(m+3)(m+2)\frac{A}{\alpha - a} - 2(m+2)B + C(\alpha - a),$$

$$Q = -(m+3)(m+2)(m+1)\frac{A}{\alpha - a} + (m+2)(m+1)B - (m+1)C(\alpha - a) + D(\alpha - a)^2,$$

ou, en vertu des équations (2),

$$(4) \quad \begin{cases} M = 2\alpha(\alpha + a), \\ N = -(3m+n+7)\alpha^2 - (8m-2n-18)a\alpha - (m+n-3)a^2, \\ P = (m+2)\left[(m+n+2)\alpha^2 + (8m-2n+12)a\alpha + (3m+n+6)a^2\right], \\ Q = -2(m+2)(m+1)^2 a(\alpha + a). \end{cases}$$

IV.

Cela posé, on a, par la définition même des fonctions Π_m,

$$\varphi_1^{m}(\alpha) = 2^{m-n-1}\frac{(\alpha+a)^{n-m}a^m}{\alpha^{n+1}}\Pi_m,$$

$$\varphi_1^{m+1}(\alpha) = 2^{m-n}\frac{(\alpha+a)^{n-m-1}a^{m+1}}{\alpha^{n+1}}\Pi_{m+1},$$

$$\varphi_2^{m+2}(\alpha) = 2^{m-n-1}\frac{(\alpha+a)^{n-m-2}a^{m+2}}{\alpha^{n+1}}\Pi_{m+2},$$

$$\varphi_2^{m+3}(\alpha) = 2^{m-n+2}\frac{(\alpha+a)^{n-m-3}a^{m+3}}{\alpha^{n+1}}\Pi_{m+3};$$

et, en substituant dans l'équation (3),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &8a^2\alpha\Pi_{m+3} - 2a\mathrm{N}\Pi_{m+2} - (\alpha+a)\mathrm{P}\Pi_{m+1} \\ &\qquad - (m+2)(m+1)^2(\alpha-a)^3\Pi_m = 0 \end{aligned}\right.$$

Dans cette équation les quantités N et P doivent être remplacées par leurs valeurs tirées des équations (4).

Voici donc une relation linéaire entre quatre fonctions consécutives Π_m, Π_{m+1}, Π_{m+2}, Π_{m+3}; mais, à cause que ces fonctions sont symétriques en a et α, on pourra former une équation qui n'en renferme que trois.

L'équation (5) ne cessera pas d'avoir lieu, si l'on change les lettres a et α l'une en l'autre, et si l'on désigne par N′ et P′ ce que deviennent N et P par suite de ce changement, on aura

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &8\alpha a^2\Pi_{m+3} - 2\alpha\mathrm{N}'\Pi_{m+2} - (\alpha-a)\mathrm{P}'\Pi_{m+1} \\ &\qquad - (m+2)(m+1)^2(\alpha+a)^3\Pi_m = 0. \end{aligned}\right.$$

en sorte qu'on pourra, à l'aide des équations (5) et (6), éliminer à volonté, soit Π_m, soit Π_{m+3}. On trouve ainsi, en remplaçant partout $\frac{\alpha-a}{4\sqrt{a\alpha}}$ par ζ,

$$\Pi_{m+3} = [(n+m+3)\zeta - (n-m-2)]\Pi_{m+2} - (m+2)^2\zeta\Pi_{m+1},$$

et

$$\Pi_{m+2} = [(n+m+2)\zeta - (n-m-1)]\Pi_{m+1} - (m+1)^2\zeta\Pi_m.$$

On voit que la première de ces équations se déduit bien de la seconde par le changement de m en $m+1$, ce qui donne une vérification parfaite de nos calculs.

V.

Si, dans la dernière des équations précédentes, on met m au lieu de $m-2$, on aura

$$(7)\qquad \Pi_m = [(n+m)\zeta - (n-m+1)]\,\Pi_{m-1} - (m-1)^2\zeta\,\Pi_{m-2}.$$

On pourra, à l'aide de cette formule, calculer les fonctions

$$\Pi_2,\quad \Pi_3, \ldots,\quad \Pi_n,$$

car les deux premières Π_0 et Π_1 se forment immédiatement; on trouve

$$\Pi_0 = 1,$$
$$\Pi_1 = (n+1)\zeta - n.$$

Calculons Π_2 à l'aide de l'équation (7), nous trouverons

$$\Pi_2 = (n+2)(n+1)\zeta^2 - 2(n+1)n\zeta + n(n-1);$$

on aurait de même

$$\Pi_3 = (n+3)(n+2)(n+1)\zeta^3 - 3(n+2)(n+1)n\zeta^2 + 3(n+1)n(n-1)\zeta - n(n-1)(n-2).$$

L'examen des valeurs que nous venons de trouver pour Π_1, Π_2, Π_3, fait présumer que l'on aura généralement

$$(8)\qquad \Pi_m = \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \frac{\Gamma(n+m-p+1)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-p+1)\,\Gamma(m-p-1)\,\Gamma(p+1)^2}\,\zeta^{m-p}.$$

et il est, en effet, facile de démontrer que si Π_{m-1} et Π_{m-2} se forment d'après cette loi, il en sera de même de Π_m. D'abord il est évident, d'après l'équation (7), que le premier et le dernier terme de Π_m se formeront d'après la loi que nous venons d'indiquer; il suffit donc de la vérifier pour l'un des termes intermédiaires.

On a, par hypothèse,

$$\Pi_{m-1} = \sum_{p=1}^{p=m-1} (-1)^p \frac{\Gamma(n+m-p)\Gamma(m)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(m-p)\Gamma(p+1)} \zeta^{n-p-1},$$

$$\Pi_{m-2} = \sum_{p=0}^{p=m-2} (-1)^p \frac{\Gamma(n+m-p-1)\Gamma(m-1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(m-p-1)\Gamma(p+1)} \zeta^{n-p-2}$$

D'après cela, et en vertu de l'équation (7), le coefficient de $(-1)^n/\zeta$ dans Π_m sera

$$(n-m+1)\frac{\Gamma(n+m-p+1)\Gamma(m)}{\Gamma(n-p+2)\Gamma(m-p+1)\Gamma(p)} - (n+m)\frac{\Gamma(n+m-p-1)\Gamma(m)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(m-p)\Gamma(p+1)}$$
$$+ (m-1)^2\frac{\Gamma(n+m-p)\Gamma(m-1)}{\Gamma(n-p+2)\Gamma(m-p-1)\Gamma(p)}$$

ou, d'après la définition des Γ,

$$\frac{\Gamma(n+m-p+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(m-p+1)\Gamma(p+1)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

VI.

On peut, d'après cela, donner à la fonction Π_m une forme très-remarquable; on a, en effet,

$$\zeta^n(\zeta-1)^m = \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-p+1)\Gamma(p+1)} \zeta^{n+m-p},$$

et, en différentiant m fois,

$$\frac{d^m.\zeta^n(\zeta-1)^m}{d\zeta^m} = \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \frac{\Gamma(n+m-p-1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(m-p-1)\Gamma(p+1)} \zeta^{n-p},$$

d'où l'on conclut

$$\Pi_m = \frac{1}{\zeta^{n-m}} \frac{d^m.\zeta^n(\zeta-1)^m}{d\zeta^m}.$$

En particulier, on aura

$$\Pi_n = \frac{d^n (\zeta^2 - \zeta)^n}{d\zeta^n};$$

si l'on fait

$$\zeta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} x,$$

il viendra

$$\Pi_n = \frac{1}{2^n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

ce qui montre que notre fonction particulière Π_n, divisée par $1.2 \ldots n$, n'est autre que la fonction X_n de Legendre, qui représente le coefficient de α^n dans le développement de $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$.

VII.

On sait que la fonction Π_n satisfait à une équation différentielle du second ordre, qui joue un rôle important dans la théorie de ces fonctions; nous allons montrer que l'échelle de relation précédemment déterminée et qui nous a conduit à l'expression de la fonction plus générale Π_m, peut aisément se transformer en une équation qui ne renferme que la fonction Π_m et ses deux premières dérivées.

Soit

$$\varpi(\zeta) = \zeta^n (\zeta - 1)^m,$$

d'où

$$\frac{d^m \varpi}{d\zeta^m} = \zeta^{n-m} \Pi_m;$$

si ϖ_1 désigne ce que devient ϖ quand on y change m en $m - 1$, on aura

$$\varpi_1(\zeta) = (\zeta - 1) \varpi(\zeta),$$

d'où

$$\frac{d^{m+1} \varpi}{d\zeta^{m+1}} = (\zeta - 1) \frac{d^{m+1} \varpi}{d\zeta^{m+1}} + (m + 1) \frac{d^m \varpi}{d\zeta^m}.$$

et, en remplaçant

$$\frac{d^{m+1} \varpi_1}{d\zeta^{m+1}}, \quad \frac{d^m \varpi}{d\zeta^m} \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\zeta} \frac{d^m \varpi}{d\zeta^m}$$

par leurs valeurs,

$$\Pi_{m+1} = [(n+1)\zeta - (n-m)]\,\Pi_m + \zeta(\zeta-1)\,\Pi'_m,$$

on pourra de la même manière exprimer Π_{m+2} à l'aide de Π_{m+1} et de Π'_{m+1}; d'ailleurs ces deux dernières quantités s'expriment à l'aide de Π_m, Π'_m et Π''_m, et l'on trouvera finalement

$$\Pi_{m+2} = [(n+2)(n+1)\zeta^2 - 2(n+1)(n-m)\zeta + (n-m)(n-m-1)]\,\Pi_m$$
$$+ 2\zeta(\zeta-1)[(n+2)\zeta - n - m]\,\Pi'_m + \zeta^2(\zeta-1)^2\,\Pi''_m.$$

Portant ces valeurs de Π_{m+1} et Π_{m+2} dans l'équation

$$\Pi_{m+2} = [(n+m+2)\zeta - (n-m-1)]\,\Pi_{m+1} - (m+1)^2\zeta\,\Pi_m,$$

on aura

$$\zeta(\zeta-1)\,\Pi''_m + [(n-m+2)\zeta - n - m - 1]\,\Pi'_m - m(n+1)\,\Pi_m = 0.$$

ou, en posant $\zeta = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$,

$$(x^2-1)\,\Pi''_m + [(n-m+2)x - (n-m)]\,\Pi'_m - m(n+1)\,\Pi_m = 0.$$

équation dans laquelle Π_m est fonction de la nouvelle variable x considérée comme indépendante.

Faisant $m = n$, on obtiendra l'équation connue à laquelle satisfait la fonction Π_n, savoir,

$$(x^2-1)\,\Pi''_n + 2x\,\Pi'_n - n(n+1)\,\Pi_n = 0.$$

VIII.

Pour que ζ puisse exprimer, comme cela est nécessaire dans notre analyse, la valeur d'une quantité de la forme $\frac{(a+\alpha)}{4a\alpha}$, a et α étant des imaginaires conjuguées, il faut et il suffit que ζ soit réelle, positive et < 1. Nous démontrerons donc un théorème important en faisant voir que les m racines de l'équation

$$\Pi_m(\zeta) = 0$$

(où nous supposons toujours n au moins égal à m), sont réelles et com-

prises entre 0 et 1. Or, pour y parvenir, considérons, à l'exemple de M. Sturm, une suite de m fonctions Π, savoir,

$$\Pi_m, \quad \Pi_{m-1}, \ldots \quad \Pi_2, \quad \Pi_1, \quad \Pi_0.$$

La dernière de ces fonctions est constante et ne peut changer de signe quand on fait varier ζ; en outre, l'équation (7) montre que si l'on fait varier ζ depuis zéro jusqu'à une valeur positive quelconque, deux fonctions Π consécutives ne peuvent s'annuler en même temps, et que si l'une d'elles s'annulle, celle qui la précède et celle qui la suit sont de signes contraires; d'où il résulte clairement que le nombre des variations que présente la suite des signes des fonctions Π ne peut s'altérer que lorsque la première change de signe et par conséquent s'annule.

Cela posé, l'équation (7) montre que pour $\zeta = 0$ deux fonctions Π consécutives sont toujours de signes contraires, et par conséquent que la suite des signes des fonctions Π présente m variations.

En second lieu, l'équation (7) ou l'équation (8) donne aisément pour $\zeta = 1$,

$$\Pi_0 = 1, \quad \Pi_1 = 1, \quad \Pi_2 = 1.2, \ldots, \quad \Pi_m = 1.2 \ldots m,$$

ce qui montre que la suite des signes des fonctions Π ne présente aucune variation.

Il résulte de là que quand ζ varie de 0 à 1, la suite des signes des fonctions Π perd m variations, et par conséquent que l'équation

$$\Pi_m(\zeta) = 0$$

a ses m racines réelles et comprises entre 0 et 1 [*].

On voit encore que la fonction Π_{m-1} joue ici le même rôle que la dérivée de Π_m, d'où il résulte que deux racines de $\Pi_m = 0$ comprennent une racine de $\Pi_{m-1} = 0$, et n'en comprennent qu'une; ce qui peut servir au calcul numérique des racines.

[*] On arriverait au même résultat en appliquant m fois de suite le théorème de Rolle à la fonction $\zeta^n(\zeta - 1)^m$, dont la $m^{\text{ième}}$ dérivée fournit l'expression de Π_m et dont les racines sont connues.

IX.

Nous ferons ici une remarque curieuse sur l'équation particulière

$$\Pi_n(\zeta) = 0,$$

où les deux arguments m et n sont égaux. On voit, d'après la forme de Π_n donnée au § VI, que cette équation ne changera pas si l'on change ζ en $1 - \zeta$, d'où il résulte que les modules des fonctions elliptiques correspondantes à l'équation

$$\Pi_n = 0$$

seront deux à deux complémentaires, ce qui a déjà été démontré dans mon Mémoire pour le cas de $n = 2$; on voit encore que si n est impair, l'équation précédente aura toujours pour racine $\frac{1}{2}$, et que par conséquent la fonction *lemniscatique* correspondra à toute fonction Π_n d'indice impair; mais il ne faut pas conclure de là que la lemniscate proprement dite se retrouve dans les différentes classes de courbes dont nous parlons: ces courbes, au contraire, diffèrent essentiellement par leur équation, ainsi que je le ferai voir en m'occupant de leurs propriétés particulières; seulement on aura plusieurs courbes dont les arcs représenteront la même fonction elliptique.

Cette observation s'applique plus généralement aux racines communes à plusieurs équations

$$\Pi = 0.$$

Ainsi, par exemple, si l'on fait

$$n' = n \pm \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}},$$

l'équation

$$\Pi_2 = 0$$

donne

$$\zeta = \frac{n}{n'-1};$$

donc, si n' est commensurable, chaque racine ζ se retrouvera dans

quelque équation

$$\Pi_1 = 0;$$

en sorte qu'une courbe de la première classe pourra servir aussi à représenter la fonction elliptique correspondante, que la seconde classe comprend déjà.

En particulier, si $n = 8$, on aura

$$n' = 2 \quad \text{et} \quad n' = 14,$$

ce qui montre que les deux fonctions elliptiques aux modules $\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $\sqrt{\frac{14}{15}}$ s'exprimeront à volonté par un arc de courbe de première ou de seconde classe.

Si, en second lieu, on fait $n = 49$, on aura

$$n' = 14 \quad \text{et} \quad n' = 84,$$

et la conclusion précédente s'appliquera aussi aux deux fonctions de modules $\sqrt{\frac{14}{15}}$ et $\sqrt{\frac{84}{85}}$; on voit même qu'il existera, dans la deuxième classe, deux courbes dont les arcs pourront représenter la fonction au module $\sqrt{\frac{14}{15}}$.

X.

J'ai été conduit, dans le Mémoire déjà cité, à considérer d'autres fonctions Π_m, qui se déduiraient, de la même manière que les premières, des deux quantités

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)^m (z+\alpha)^n}{(z+a)^{n+1}}, \quad \psi(z) = \frac{(z-a)^m (z+\alpha)^n}{(z-\alpha)^{m+1}}.$$

La fonction φ que nous considérons ici, se déduirait de l'ancienne par le changement de n en $-n-1$; il en sera donc de même de la nouvelle fonction Π_m, et l'on aura

$$\Pi_m = [-(n-m+1)\zeta + (n+m)]\,\Pi_{m-1} - (m-1)^2 \zeta\, \Pi_{m-2};$$

on a d'ailleurs

$$\Pi_0 = 1, \quad \Pi_1 = -n\zeta + (n+1),$$

d'où l'on conclut pour $\zeta = 1$,

$$\Pi_0 = 1, \quad \Pi_1 = 1, \quad \Pi_2 = 1.2, \ldots \quad \Pi_m = 1.2.\ldots m.$$

D'ailleurs pour $\zeta = \infty$, deux fonctions Π consécutives sont toujours de signes contraires, d'où il résulte que, quand ζ varie de 1 à ∞, la suite des signes des fonctions Π gagne m variations, et par conséquent que l'équation

$$\Pi_m = 0$$

a ses m racines réelles positives, mais plus grandes que 1, en sorte qu'elles ne peuvent pas servir à l'objet que nous nous proposions dans le Mémoire auquel se rapportent les développements qu'on vient de lire.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. WILLIAM THOMSON

A M. LIOUVILLE.

« Cambridge, 8 octobre 1845

» ... Pendant mon séjour à Paris, je vous ai parlé du principe des *images* pour la solution de quelques problèmes relatifs à la distribution de l'électricité. Il y a une foule de problèmes auxquels je ne pensais pas alors, et où j'ai trouvé plus tard qu'on peut l'appliquer. Par exemple, on parvient ainsi à exprimer algébriquement la distribution d'électricité sur deux plans conducteurs qui se coupent sous un angle $\frac{\pi}{i}$, quand un point électrique est posé dans l'espace entre les deux plans. (L'idée est analogue à celle de *kaléidoscope* de Brewster.) Quand il y a trois plans qui se coupent perpendiculairement, ou quand il y a un plan qui coupe perpendiculairement deux plans qui se coupent sous un angle $\frac{\pi}{i}$, on peut également trouver la distribution sous l'influence d'un point électrique donné. On peut aussi exprimer très-facilement la distribution sur les parois intérieures d'un parallélipipède rectangulaire creux, soumis à l'influence d'un point électrique posé en dedans, en se servant des intégrales définies.

» Soient C le centre d'une sphère S; Q, Q′ deux points pris sur un même rayon CA et sur son prolongement, de telle manière que

$$CQ.CQ' = CA^2;$$

et P un point quelconque sur la surface S. On a, comme on sait,

$$\frac{PQ}{PQ'} = \frac{AQ}{AQ'}.$$

On peut, à cause de ce théorème, appeler Q et Q′ *points réciproques*

relatifs à la sphère S, dont chacun est *l'image* de l'autre dans la sphère. Suivant cette définition, l'image d'une ligne ou surface sera le lieu des images de points pris sur cette ligne ou surface. Ainsi, on trouve que l'image d'un plan ou d'une sphère est toujours une sphère (le plan étant compris sous cette désignation). Les images de deux sphères se coupent sous le même angle, réel ou imaginaire, que les surfaces données.

» Soient Q, Q′ deux points réciproques, relativement à une sphère S, et q, q', s leurs images et l'image de la sphère S dans une autre sphère donnée. Les points q, q' seront réciproques relativement à la sphère s.

» A l'aide de ces théorèmes, je parviens facilement à déterminer les images successives d'un point quelconque (qui n'est pas nécessairement dans la ligne qui passe par leurs centres), dans deux sphères qui se coupent sous un angle donné. Quand cet angle est imaginaire, je parviens ainsi à exprimer la distribution de l'électricité sur les deux sphères, sous l'influence d'un point quelconque, chargé d'électricité, au moyen des séries de M. Poisson (qui convergent comme des séries géométriques). Quand l'angle d'intersection est réel et compris dans l'expression $\frac{\pi}{i}$, on parvient ainsi à exprimer algébriquement la distribution d'une quantité donnée d'électricité sur la surface extérieure des sphères, qui n'est soumise à aucune influence ou qui l'est à celle d'un point donné. S'il y a trois surfaces sphériques qui se coupent perpendiculairement, on exprime algébriquement, par les mêmes principes, la distribution sur la surface extérieure. Je parviens aussi à déterminer les températures stationnaires dans l'intérieur d'une lentille dont les deux surfaces se coupent sous un angle $\frac{\pi}{i}$, la température de chaque point de ces surfaces étant donnée.

» Si l'on veut déterminer la distribution d'électricité sur une surface donnée S, sous l'influence d'un point quelconque P, on réduit, par les mêmes principes, le problème à la détermination de la distribution, sans aucune influence, sur l'image de S dans une sphère décrite du centre P, avec un rayon quelconque. Une application générale de ce théorème conduit à une démonstration rigoureuse du théorème de M. Gauss, qu'on peut produire, au moyen d'une distribution dé-

terminée de matière sur une surface fermée quelconque, une valeur donnée du potentiel à chaque point de la surface. Il y a aussi beaucoup d'applications spéciales qu'on peut faire de ce théorème aux cas dans lesquels S est une sphère, un disque circulaire, ou un segment d'une surface sphérique fait par un plan. J'en ai aussi déduit une démonstration géométrique du théorème que vous avez publié dans le numéro d'avril 1845 de votre Journal (*voir* page 137), dont voici l'expression analytique :

« Par une transformation convenable, on trouve

$$(a)\qquad U = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{[d\zeta]^n}{(\Sigma\zeta^2+u^2)^{\frac{n+1}{2}}\,(\Sigma\zeta^2-2\zeta f+f^2+u'^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

où

$$f^2 = \Sigma(x-x')^2.$$

Maintenant, posons

$$\zeta_1 = \rho\cos\Phi,\quad \zeta_2 = \rho\sin\Phi\cos\theta_1,\quad \zeta_3 = \rho\sin\Phi\sin\theta_1\cos\theta_2,\ldots$$
$$\zeta_{n-1} = \rho\sin\Phi\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\cos\theta_{n-2},\quad \zeta_n = \rho\sin\Phi\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2},$$

d'où nous tirons

$$[d\zeta]^n = \rho^{n-1}\sin^{n-2}\Phi.\sin^{n-3}\theta_1.\sin^{n-4}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}.[d\theta]^{n-2}\,d\Phi\,d\rho,$$

ce qui est une transformation donnée par Green. L'équation (*a*) se trouve ainsi réduite à

$$(b)\qquad U = H_{n-2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^{n-1}\sin^{n-2}\Phi\,d\Phi\,d\rho}{(\rho^2+u^2)^{\frac{n-1}{2}}\,(\rho^2-2\rho f\cos\Phi+f^2+u'^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

où H_{n-2} désigne la valeur du produit

$$\int_0^{\pi}\sin^{n-3}\theta\,d\theta.\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta\,d\theta\ldots\int_0^{\pi}d\theta.$$

» Soit

$$\rho = u\tang\tfrac{1}{2}\zeta:$$

on trouve ainsi

$$Uu = \tfrac{1}{2}H_{n-2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^{n-3}\zeta\sin^{n-2}\Phi\,d\Phi\,d\zeta}{[2(f^2+u'^2-u^2)-2(f^2+u'^2-u^2)\cos\zeta-4uf\sin\zeta\cos\Phi]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Posons maintenant

$$2(f^2 + u'^2 + u^2) = h^2 + k^2,$$

$$2(f^2 + u'^2 - u^2)\cos\varphi - 4uf\sin\varphi\cos\psi$$
$$= [4(f^2 + u'^2 - u^2)^2 + 16u^2 f^2]^{\frac{1}{2}}\cos\delta$$
$$= 2hk\cos\delta,$$

$$\sin\Phi\sin\Theta = \sin\varphi\sin\delta,$$

d'où nous tirons

$$h^2 = (u' + u)^2 + f^2, \quad k^2 = (u' - u)^2 + f^2,$$
$$\sin\Theta\, d\Phi\, d\Theta = \sin\delta\, d\varphi\, d\delta,$$

et l'expression se réduit à

$$\mathrm{U}u = \frac{1}{2}\mathrm{H}_{n-2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^{n-2}\delta\sin^{n-2}\varphi\, d\varphi\, d\delta}{(h^2 - 2hk\cos\delta + k^2)^{\frac{n-1}{2}}}$$
$$= \mathrm{H}_{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-2}\delta\, d\delta}{(h^2 - 2hk\cos\delta + k^2)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Soit

$$h\sin(\psi - \delta) = k\sin\psi,$$

on trouvera facilement, à cause de $h > k$,

$$\mathrm{U}u = \frac{\mathrm{H}_n}{h^{n-1}},$$

ou

$$\mathrm{U}u = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{1}{[\Sigma(x-x')^2 + (u-u')^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

» Je vais publier ces recherches dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal* [*] aussitôt que possible, mais vous pouvez faire ce que vous voudrez du résumé précédent. »

---

[*] C'est le titre que portera désormais le *Cambridge mathematical Journal*, excellent Recueil dans la direction duquel M. William Thomson vient de remplacer M. Robert Leslie Ellis.

THÉORIE
DES POINTS SINGULIERS
DANS LES COURBES PLANES ALGÉBRIQUES;

PAR C. BRIOT,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon

§ I.

Caractère général des points singuliers.

L'idée fondamentale de la théorie que je vais exposer est due à M. Sturm, et a été indiquée par M. Liouville dans son cours à l'École Polytechnique. J'ai cru faire une chose utile en lui donnant ici tous les développements qu'elle comporte.

Une équation algébrique à deux inconnues x et y peut être mise sous la forme

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

$F(x, y)$ représentant un polynôme entier du degré n par rapport à x et y. Traçons dans un plan deux axes rectangulaires de coordonnées; la série des points du plan dont les coordonnées satisfont à l'équation (1) peut être considérée comme la représentation géométrique des solutions réelles de cette équation.

Soient M l'un de ces points, a et b ses coordonnées; nous nous proposons de rechercher quels sont les points voisins du point M qui jouissent de la propriété énoncée. Appelons $a + h$, $b + k$ les coordonnées d'un point voisin, l'équation (1) se développe ainsi :

$$\frac{dF}{da} h + \frac{dF}{db} k + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{da^2} h^2 + 2\frac{d^2F}{da\,ab} hk + \frac{d^2F}{db^2} k^2\right) + \ldots = 0. \tag{2}$$

Du point M comme centre avec un rayon ρ infiniment petit, décri-

vons une circonférence (*Pl. II, fig.* 1), et recherchons les points de cette circonférence qui satisfont à l'équation proposée. En appelant θ l'angle du rayon vecteur avec une parallèle à l'axe des x, on a

$$h = \rho \cos \theta,$$
$$k = \rho \sin \theta;$$

d'ailleurs il est toujours possible de déterminer un module H et un angle α, tels que

$$\frac{dF}{da} = - H \sin \alpha,$$
$$\frac{dF}{db} = H \cos \alpha;$$

l'équation (1) prend alors la forme

$$(3) \qquad H \sin (\theta - \alpha) + P\rho + Q\rho^2 + \ldots = 0.$$

Le rayon ρ étant infiniment petit, si H n'est pas nulle, l'équation (3) ne pourra être satisfaite que par des valeurs de θ voisines de celles qui annulent $\sin(\theta - \alpha)$, c'est-à-dire voisines de α ou de $180^\circ + \alpha$. Par le point M menons donc une droite faisant l'angle α avec l'axe des x, les points cherchés ne pourront se trouver que dans le voisinage des points A et A′ où cette droite coupe la circonférence. En effet, donnons à θ une valeur différant de α ou de $180^\circ + \alpha$ d'une quantité supérieure ou égale à l'angle Θ très-petit, mais déterminé, il sera possible de trouver une quantité très-petite e, telle que, pour toute valeur de ρ inférieure ou égale à e, le premier terme du polynôme

$$(4) \qquad H \sin (\theta - \alpha) + P\rho + Q\rho^2 + \ldots$$

obtienne une valeur numérique plus grande que la somme de tous les autres termes, et par conséquent donne son signe au polynôme. Considérons la dérivée

$$(5) \qquad H \cos (\theta - \alpha) + \frac{dP}{d\theta} \rho + \ldots$$

du polynôme (4) par rapport à θ. Le premier terme de cette dérivée ne s'annulant pour aucune des valeurs de θ comprises entre $\alpha - \Theta$

et $\alpha + \Theta$, ou bien entre $180^\circ + \alpha - \Theta$ et $180^\circ + \alpha + \Theta$, on pourra de même pour chacune de ces valeurs de θ trouver une quantité très-petite e' telle que toute valeur de ρ inférieure ou égale à e' rende ce premier terme supérieur numériquement à la somme de tous les autres. Appelons ε la plus petite des quantités e et e', et supposons que le rayon de la circonférence décrite autour du point M soit égal ou inférieur à ε; menons d'ailleurs deux droites BB′ et CC′ qui fassent de part et d'autre avec AA′ l'angle Θ. De ce qui précède on conclura : 1° Que le polynôme (4) étant positif pour tous les points de l'arc BC′ et négatif pour tous les points de l'arc B′C, ces deux arcs ne renferment aucune solution de l'équation (1); 2° que ce même polynôme, fonction continue de θ (car il est facile de démontrer qu'un polynôme entier par rapport au sinus et au cosinus d'un arc est une fonction continue de cet arc), ayant des valeurs de signes contraires aux deux extrémités de chacun des arcs BC et B′C′, chacun de ces deux arcs contient une solution au moins de l'équation proposée; 3° qu'enfin, la dérivée du polynôme (4) ne s'annulant pour aucun des points des arcs BC et B′C′, chacun de ses deux arcs ne renferme qu'une solution.

Concevons maintenant que ρ décroisse d'une manière continue de ε à 0, chacune des valeurs de ρ donnera dans chacun des deux angles infiniment petits BMC, B′MC′ un point particulier, et la série de ces points formera évidemment une courbe continue passant au point M. Ainsi :

Théorème. *Une équation algébrique à deux inconnues représente généralement une courbe continue.*

Comme l'angle 2Θ peut être rendu aussi petit que l'on voudra, la droite AA′, qui a pour équation

$$\frac{dF}{da}(x-a) + \frac{dF}{db}(y-b) = 0,$$

est tangente à la courbe au point M.

Étudions la forme de la courbe dans le voisinage de ce point. Pour cela, dans le polynôme (4), faisons $\theta = \alpha$ ou $\theta = 180^\circ + \alpha$; le premier terme s'annule, de sorte que le polynôme se réduit à

$$P\rho + Q\rho^2 + \ldots; \tag{6}$$

on pourra trouver une quantité petite e telle que pour toute valeur de ρ inférieure ou égale à e'', le premier terme du polynôme (6) qui ne s'annule pas donne son signe au polynôme. Appelons ε' la plus petite des quantités ε et e'', et supposons que la circonférence décrite autour du point M ait un rayon inférieur à ε'. Observons d'ailleurs que pour $\theta = \alpha$ et pour $\theta = 180^\circ + \alpha$, les coefficients P, Q,... ont la même valeur numérique, les coefficients d'ordre impair avec le même signe, ceux d'ordre pair avec des signes contraires. Cela posé, si le premier terme qui ne s'annule pas dans le polynôme (6) est de rang impair, le polynôme (4) aura même signe, par exemple le signe $+$, en A et A', et, par suite, les deux points de la courbe seront situés, l'un entre A et C, l'autre entre A' et B'; dans ce cas la courbe est convexe et la concavité est dirigée dans le sens des x négatives : si le signe commun était $-$, la courbe serait encore convexe, mais la concavité serait dirigée dans le sens des x positives. Dans le cas où le premier terme qui ne s'annule pas dans le polynôme (6) est d'ordre pair, il est aisé de voir que la courbe passe d'un côté à l'autre de la tangente, c'est-à-dire que le point M est un point d'inflexion (*fig.* 2).

L'ordre du premier terme qui ne s'annule pas indique l'ordre de contact entre la courbe et sa tangente. En effet, on peut appeler ordre de contact entre une courbe et sa tangente l'ordre de petitesse du rapport de l'arc compris entre ces deux lignes au rayon ρ du cercle (en regardant ρ comme l'infiniment petit du premier ordre), ou, en d'autres termes, l'ordre de petitesse de l'angle formé par la tangente et le rayon vecteur allant du point M à un point voisin, en prenant pour infiniment petit du premier ordre la distance de ces deux points. Soit $\theta = \alpha + \theta'$; l'équation (5) devient

$$(7) \qquad \text{H} \sin \theta' + \text{P}\theta' + \text{Q}\theta'^2 + \ldots + \text{U}\theta'^m + \ldots = 0,$$

dans laquelle U représente le premier coefficient qui ne s'annule pas pour $\theta' = 0$. En observant que les coefficients qui s'annulent pour $\theta' = 0$ contiennent $\sin \theta'$ en facteur commun, nous verrons que pour satisfaire à l'équation (7), $\sin \theta'$, et par suite θ' doivent être des infiniment petits de l'ordre m.

On peut trouver par les mêmes considérations le cercle osculateur;

appelons K la valeur de P pour $\theta = \alpha$, l'équation

$$H \sin(\theta - \alpha) + K\rho = 0$$

représente un cercle qui a un contact du second ordre avec la courbe; le rayon du cercle osculateur est donc $\frac{H}{2K}$.

De tout ce qui précède, on déduit la conclusion générale suivante :

Théorème. *Étant donnés une équation algébrique*

$$F(x, y) = 0$$

et un point dont les coordonnées satisfaisant à l'équation proposée n'annulent pas à la fois les deux dérivées du premier membre par rapport à x et à y, en ce point passe une branche de courbe simple avec ou sans inflexion.

Si donc on ne range pas parmi les singularités des courbes les inflexions et les contacts d'ordres supérieurs, on peut dire :

Théorème. *Les points singuliers ne se trouvent que parmi ceux dont les coordonnées annulent à la fois les deux premières dérivées du premier membre de l'équation proposée.*

§ II.

Distinction des points singuliers.

Soit M un point dont les coordonnées satisfont aux trois équations

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{dF(x, y)}{dx} = 0, \quad \frac{dF(x, y)}{dy} = 0;$$

l'équation (3) se réduit à la forme générale

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d^m F}{da^m} \cos^m \theta + \frac{m}{1} \frac{d^m F}{da^{m-1}\, db} \cos^{m-1} \theta \sin \theta + \ldots + \frac{d^m F}{db^m} \sin^m \theta\right) \\ &\qquad + S\rho + T\rho^2 + \ldots \end{aligned} \right\} = 0,$$

m étant un nombre entier au plus égal au degré n de l'équation.

Pour satisfaire à l'équation (8), il faut donner à θ des valeurs voi-

sines de celles qui annulent son premier terme; cherchons donc les solutions de l'équation

$$(9)\qquad \frac{d^m F}{db^m}\sin^m\theta + \frac{m}{1}\frac{d^m F}{db^{m-1}da}\sin^{m-1}\theta\cos\theta + \ldots + \frac{d^m F}{da^m}\cos^m\theta = 0.$$

Si $\frac{d^m F}{db^m}$ n'est pas nul, la valeur 0 donnée à $\cos\theta$ ne satisfaisant pas à l'équation (9), on peut diviser tous les termes par $\cos^m\theta$, ce qui met cette équation sous la forme

$$(10)\qquad \frac{d^m F}{db^m}\operatorname{tang}^m\theta + \frac{m}{1}\frac{d^m F}{db^{m-1}da}\operatorname{tang}^{m-1}\theta + \ldots = 0,$$

ou, si l'on pose $\operatorname{tang}\theta = u$,

$$(11)\qquad \frac{d^m F}{db^m}u^m + \frac{m}{1}\frac{d^m F}{db^{m-1}da}u^{m-1} + \ldots = 0;$$

l'équation (8) peut aussi s'écrire de la même manière,

$$(12)\qquad \left(\frac{d^m F}{db^m}u^m + \frac{m}{1}\frac{d^m F}{db^{m-1}da}u^{m-1} + \ldots\right) + \cos\theta\, S'\rho + \cos^2\theta\, T'\rho^2 + \ldots = 0,$$

S', T',... représentant des polynômes entiers par rapport à u. Cette équation, résolue par les méthodes ordinaires, a m racines; ce qui donne sur la circonférence $2m$ points diamétralement opposés deux à deux.

Si les m' premiers coefficients du premier membre de l'équation (9) sont nuls (m' étant un nombre inférieur à m), cette équation se décompose en deux équations

$$(13)\qquad \cos^{m'}\theta = 0,$$

et

$$(14)\qquad \frac{d^m F}{db^{m-m'}da^{m'}}u^{m-m'} + \ldots = 0.$$

La première donne une racine du degré m' de multiplicité; cette racine est $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$. La seconde donne $m-m'$ racines différentes de la précédente. Ainsi, en résumé, si nous ne faisons varier θ que de 0° à 180°, en convenant de regarder deux points diamétralement opposés comme une seule solution, nous pourrons dire que l'équa-

tion 9 a m racines. Il n'y a lieu à considérer parmi ces m racines que les racines réelles; nous les distinguerons en racines simples et en racines multiples.

Soient (*fig.* 3) A_1, A_2, A_3,..., A'_1, A'_2, A'_3,... les diverses solutions de l'équation 9); B_1, C_1, B_2, C_2, B_3, C_3,... des points distants des premiers de l'angle très-petit Θ, plus petit que la plus petite différence qui existe entre les racines de l'équation 9. Le premier membre de l'équation 9, et, par suite, le premier membre de l'équation (8), si ρ est suffisamment petit, ne s'annulent pas et conservent le même signe dans toute l'étendue des arcs B_1C_2, B_2C_3, B_3C_4,.... Les solutions cherchées ne peuvent donc se trouver que dans les arcs infiniment petits B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3,.... Or il est facile de voir que les polynômes dont nous venons de parler auront aux deux extrémités de chacun de ces arcs, même signe, si cet arc correspond à une racine d'un degré pair de multiplicité, et des signes contraires si le degré de multiplicité est impair. En effet, distinguons la solution $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$ qui, si elle existe, provient de l'équation (13), et les autres solutions qui toutes proviennent de l'équation (14). Dans le premier cas, nous mettrons le polynôme (8) sous la forme

$$G\cos^m\theta + S\rho + T\rho^2 + \ldots; \tag{15}$$

G ne s'annulant pas pour $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$, on peut choisir Θ assez petit pour que cette quantité conserve le même signe de $90^\circ - \Theta$ à $90^\circ + \Theta$, et de $270^\circ - \Theta$ à $270^\circ + \Theta$. Dans le second cas, en appelant u_0 la tangente de l'angle qu'on considère, et m' le degré de multiplicité, le polynôme (8) s'écrira

$$G(u - u_0)^{m'} + S\rho + T\rho^2 + \ldots. \tag{16}$$

Ainsi chacun des arcs B_1C_1, B_2C_2,... *renferme un nombre pair* (0 étant compris dans les nombres pairs) *ou un nombre impair de solutions, suivant que le degré de multiplicité correspondant est pair ou impair.* En outre, *ce nombre de points sera au plus égal au degré m' de multiplicité;* car s'il était plus grand, il faudrait que la dérivée d'ordre m' des polynômes (15) ou (16) s'annulât dans l'étendue de l'arc dont il s'agit, ce qui est impossible, puisque l'une et l'autre de ces dérivées contiennent un terme de la forme $G\sin^{m'}\theta$ ou G.

Les racines simples n'offrent aucune difficulté; chacune d'elles fournit une branche de courbe particulière, avec ou sans inflexion.

Étudions une racine double $\theta = \alpha$, et soit AA′ (*fig.* 4) la droite correspondante. Nous pouvons diviser par G les polynomes (15) et (16), ce qui nous donne

$$\cos^2 \varphi + S'\varphi + T'\varphi^2 + \ldots, \tag{17}$$

$$u - u_0{}^2 + S'\varphi + T'\varphi^2 + \ldots. \tag{18}$$

Aux extrémités des arcs BC et B′C′, ces polynômes ont le signe +.

Si le premier terme du polynôme

$$S'\varphi + T'\varphi^2 + \ldots \tag{19}$$

qui, pour $\varphi = \alpha$ ou $\varphi = 180^\circ - \alpha$, ne s'annule pas, est d'ordre pair, ce terme, et, par suite, le polynôme auront le même signe en A et A′. Supposons que ce soit le signe —; dans ce cas, il y a une solution de chaque côté des points A et A′, et la courbe a la forme représentée par la *fig.* 4. Lorsque ce signe commun est +, il y a ambiguïté; chacun des deux arcs BC et B′C′ peut ne contenir aucune solution, ou bien en contenir deux placées d'un même côté de A et A′. Si le premier terme du polynôme (19), qui, pour $\theta = \alpha$ ou $\theta = 180^\circ + \alpha$, ne s'annule pas, est d'ordre impair, ce premier terme, et, par suite, le polynôme auront des signes contraires en A et A′, par exemple le signe — en A et le signe + en A′; l'arc BC renferme alors deux solutions, une de chaque côté de A, mais il y a incertitude pour l'autre arc B′C′. Cette incertitude peut être levée aisément si le premier terme dont nous avons parlé est S′. Écrivons, en effet, les polynômes sous la forme

$$\cos^2 \varphi + \varphi S' + T'\varphi + \ldots$$

$$u - u_0{}^2 + \varphi S' + T'\varphi + \ldots;$$

S′ donne son signe à la parenthèse dans toute l'étendue de l'arc B′C′, et, par suite, le polynôme, somme de deux quantités positives, ne peut s'annuler. Dans ce cas, la courbe offre donc en M un rebroussement de première espèce (*fig.* 5).

Cherchons maintenant un moyen de faire disparaître l'incertitude que nous avons rencontrée dans la discussion de la racine double. Lais-

sons de côté, pour le moment, la solution $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$ si elle existe; il sera permis, dans l'étude des autres racines, de substituer à la circonférence decrite autour du point M deux parallèles à l'axe des y, situées de part et d'autre de M à une distance infiniment petite h (*fig.* 6). De cette manière, l'équation de la courbe prend la forme

$$G(u - u_0)^2 + Sh + Th^2 + \ldots = 0, \tag{20}$$

dans laquelle G, S, T,... représentent des polynômes entiers en u, et G ne s'annule pas pour $u = u_0$. Pour satisfaire à cette équation, il faut nécessairement que $u - u_0$ soit une quantité infiniment petite; posons donc

$$u = u_0 + u'h,$$

l'équation (20) devient (S_0 étant nulle)

$$\left(G_0 u'^2 + \frac{dS_0}{du_0} u' + T_0\right) + S'h + T'h^2 + \ldots = 0. \tag{21}$$

On étudiera l'équation (21) de la même manière que l'équation (20) par la considération des deux racines de l'équation du deuxième degré

$$G_0 u'^2 + \frac{dS_0}{du_0} u' + T_0 = 0.$$

Lorsque les racines sont imaginaires, les arcs BC et B'C' ne renferment aucune solution. Lorsque les racines sont réelles et inégales, l'équation (21), et, par suite, l'équation (20) admet deux solutions dans chacun des arcs; on a, dans ce cas, une branche double. Enfin, lorsque les racines sont réelles et égales, l'équation (21) peut s'écrire

$$G_0(u' - u'_0)^2 + S'h + T'h^2 + \ldots = 0. \tag{22}$$

Si $\frac{S'_0}{G_0}$ n'est pas nulle et a, par exemple, le signe $-$, l'équation (22) a deux solutions pour $h > 0$, et aucune pour $h < 0$; dans ce cas, la courbe offre en M un rebroussement de deuxième espèce (*fig.* 6), à moins que u'_0 ne soit nulle, auquel cas le rebroussement serait de première espèce. Si $S'_0 = 0$ et que l'ambiguïté se présente, on fera subir à

l'équation (22) la même transformation que nous avons fait subir tout à l'heure à l'équation (21); et ainsi de suite.

La méthode que nous venons d'employer dans la discussion d'une racine double peut être généralisée et étendue à une racine d'un degré quelconque de multiplicité; afin d'éviter les imaginaires, on posera

$$h = i\varepsilon,$$

ε représentant une quantité positive infiniment petite, i le nombre $+1$ pour la parallèle de droite, et le nombre -1 pour celle de gauche.

§ III.

Autre méthode pour la distinction des points singuliers.

Remplaçons encore la circonférence décrite autour du point M par deux parallèles à l'axe des y situées à la distance infiniment petite ε et de part et d'autre du point M; l'équation de la courbe se met sous la forme générale

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{d^m F}{db^m} u^m + \dfrac{m}{1}\dfrac{d^m F}{db^{m-1}da} u^{m-1} + \ldots + \dfrac{d^m F}{da^m}\right) \\ \qquad + iS\varepsilon + T\varepsilon^2 + iU\varepsilon^3 + \ldots\end{array}\right\} = 0,$$

dans laquelle S, T, U,... représentent des polynômes entiers en u.

Commençons par résoudre l'équation

$$(24)\qquad \frac{d^m F}{db^m} u^m + \frac{m}{1}\frac{d^m F}{db^{m-1}da} u^{m-1} + \ldots + \frac{d^m F}{da^m} = 0,$$

et soient $u_0, u_1, \ldots$ ses différentes racines; ordonnons ensuite le polynôme (23) par rapport à u, et appliquons à ce polynôme le théorème de M. Sturm, c'est-à-dire divisons-le par sa dérivée, celle-ci par le reste changé de signe, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un reste indépendant de u. Les coefficients étant des polynômes entiers en ε, il sera souvent nécessaire, pour effectuer une division, de multiplier par un polynôme en ε; or il faut avoir soin que ces multiplicateurs soient positifs: pour cela, comme ε est infiniment petit, il suffira que le terme le moins élevé en ε soit positif. Appelons

$$(25)\qquad A,\quad B,\quad C,\ldots,\quad F$$

la série des polynômes ainsi obtenus et ordonnés par rapport aux puissances croissantes de ε. Donnons à u une valeur un peu plus petite que l'une quelconque des racines de l'équation (24), que u_0 par exemple, et comptons le nombre des variations que présente la série (25); chaque polynôme prenant le signe de son premier terme, on considérera simplement les premiers termes. Donnons ensuite à u la valeur u_0, puis une valeur un peu plus grande, et comptons de même les variations. Les nombres de variations perdues dans ces deux intervalles indiquent exactement les nombres de solutions situées dans le voisinage de la racine u_0, soit d'un côté, soit de l'autre.

La méthode que nous venons d'exposer pour la discussion d'une courbe plane peut s'appliquer aux surfaces courbes; ce sera l'objet d'un autre Mémoire.

NOTE SUR LA FORMULE DE TAYLOR;

PAR M. J. CAQUÉ.

1. Soit $y = f(x)$ une fonction donnée de x, et désignons par y_1, y_2,... les valeurs qu'elle prend quand x augmente successivement de la constante Δx, en sorte que $y_k = f(x + k\Delta x)$. En représentant par $\Delta^n y_k$ la différence $n^{ième}$ de y_k, on a, quels que soient n et k,

$$(A) \qquad \Delta^n y_k = \Delta^n y + (\Delta^{n+1} y + \Delta^{n+1} y_1 + \ldots + \Delta^{n+1} y_{k-1}),$$

équation qui n'est, en effet, que la différence $n^{ième}$ de l'équation évidente

$$y_k = y + \Delta y + \Delta y_1 + \ldots + \Delta y_{k-1}.$$

Cette dernière, en remplaçant k par m et posant $m\Delta x = h$, donne aussi

$$(1) \qquad f(x + h) = f(x) + (\Delta y + \Delta y_1 + \ldots + \Delta y_{m-2} + \Delta y_{m-1}).$$

Mais, si dans l'équation (A) on fait $n = 1$, puis successivement $k = 1$, $k = 2, \ldots$, $k = m - 1$, on aura des valeurs de Δy_1, $\Delta y_2, \ldots$, Δy_{m-1}, qui, portées dans l'équation (1), nous donneront, réduction faite,

$$(2) \qquad f(x + h) = f(x) + m\Delta y + [(m-1)\Delta^2 y + (m-2)\Delta^2 y_1 + \ldots + 2\Delta^2 y_{m-3} + \Delta^2 y_{m-2}].$$

On pourrait reprendre de nouveau l'équation (A), y poser $n = 2$, puis successivement $k = 1$, $k = 2, \ldots$, $k = m - 2$, et reporter dans l'équation (2) les valeurs de $\Delta^2 y_1$, $\Delta^2 y_2, \ldots$, $\Delta^2 y_{m-2}$ ainsi obtenues; en réduisant, on aurait

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y \\ &+ \left[\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\Delta^3 y + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\Delta^3 y_1 + \ldots + 3\Delta^3 y_{m-4} + \Delta^3 y_{m-3} \right] \end{aligned} \right.$$

Et l'on pourrait continuer ce mode d'élimination, qui conduirait finalement à la formule

$$(4)\qquad f(x+h) = f(x) + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\Delta^n y + R_n,$$

R_n remplaçant la quantité suivante, dans laquelle, en général, C_n^{m-g} représente le nombre des combinaisons de $m-g$ lettres n à n :

$$R_n = C_n^{m-1}\Delta^{n+1}y + C_n^{m-2}\Delta^{n+1}y_1 + C_n^{m-3}\Delta^{n+1}y_2 + \ldots + C_n^{n+1}\Delta^{n+1}y_{m-n-2} + C_n^n\Delta^{n+1}y_{m-n-1}.$$

Mais, sans avoir même besoin de passer par l'équation (3), nous allons prouver directement que l'équation (4) a toujours lieu.

D'abord elle est vérifiée pour $n = 1$, puisqu'elle coïncide alors avec l'équation (2). Pour démontrer généralement l'équation (4), il suffit donc de faire voir que, si elle est exacte pour une valeur de n, elle l'est encore pour la valeur suivante.

Dans l'équation (A), remplaçons n par $n+1$, puis posons successivement $k = 1$, $k = 2, \ldots$, $k = m-n-1$; les divers résultats, multipliés par des facteurs convenables, forment le tableau suivant :

$$C_n^{m-1}\Delta^{n+1}y = C_n^{m-1}\Delta^{n+1}y,$$

$$C_n^{m-2}\Delta^{n+1}y_1 = C_n^{m-2}\Delta^{n+1}y + C_n^{m-2}\Delta^{n+2}y,$$

$$C_n^{m-3}\Delta^{n+1}y_2 = C_n^{m-3}\Delta^{n+1}y + C_n^{m-3}\Delta^{n+2}y + C_n^{m-3}\Delta^{n+2}y_1,$$

.....

.....

$$C_n^{n+1}\Delta^{n+1}y_{m-n-2} = C_n^{n+1}\Delta^{n+1}y + C_n^{n+1}\Delta^{n+2}y + C_n^{n+1}\Delta^{n+2}y_1 + \ldots + C_n^{n+1}\Delta^{n+2}y_{m-n-2},$$

$$C_n^n\Delta^{n+1}y_{m-n-1} = C_n^n\Delta^{n+1}y + C_n^n\Delta^{n+2}y + C_n^n\Delta^{n+2}y_1 + \ldots + C_n^n\Delta^{n+2}y_{m-n-2} + C_n^n\Delta^{n+2}y_{m-n-1}.$$

En faisant la somme des premiers membres, on reproduit la valeur de R_n; on peut donc écrire que cette quantité est égale à la somme des seconds membres; celle-ci se présentera sous une forme plus simple, en faisant usage de ce théorème d'algèbre :

« La somme des nombres des combinaisons n à n, de $m-g$, » $m-g-1, \ldots, n+1$, n lettres, est égale au nombre des combi- » naisons $n+1$ à $n+1$ de $m-g+1$ lettres. »

Conséquemment on aura

$$R_n = C_{n+1}^{m} \Delta^{n+1} y + R_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.2\ldots n.\, n+1} \Delta^{n+1} y + R_{n+1},$$

en posant, pour abréger,

$$R_{n+1} = C_{n+1}^{m-1} \Delta^{n+2} y + C_{n+1}^{m-2} \Delta^{n+2} y_1 + \ldots + C_{n+1}^{n+2} \Delta^{n+2} y_{m-n-3} + C_{n+1}^{n+1} \Delta^{n+2} y_{m-n-2}$$

Or cette valeur de R_n, mise dans l'équation (4), donne le même résultat que la substitution de $n+1$ à n dans la même équation; donc l'équation (4) a lieu généralement.

2. Si, dans l'équation (4), on remplace m par sa valeur tirée de $m\Delta x = h$, on trouve aisément

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1.2}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \ldots + \frac{h(h-\Delta x)\ldots[h-(n-1)\Delta x]}{1.2\ldots n}\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} + R_n.$$

Le terme complémentaire R_n peut évidemment se mettre sous cette forme

$$\Delta x^{n+1}\left(C_n^{m-1}\frac{\Delta^{n+1} y}{\Delta x^{n+1}} + C_n^{m-2}\frac{\Delta^{n+1} y_1}{\Delta x^{n+1}} + \ldots + C_n^{n}\frac{\Delta^{n+1} y_{m-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right),$$

de sorte qu'en représentant par M la somme des termes entre parenthèses, divisée par la somme C_n^{m-1} + etc. de leurs coefficients, il vient

$$R_n = \Delta x^{n+1}.(C_n^{m-1} + C_n^{m-2} + \ldots + C_n^{n}\, M,$$

c'est-à-dire, en vertu d'un théorème déjà invoqué,

$$R_n = \Delta x^{n+1} C_{n+1}^{m} M;$$

en mettant donc pour C_{n+1}^{m} son expression connue, et remplaçant dans cette dernière m par $\frac{h}{\Delta x}$, nous aurons enfin

$$R_n = \frac{h(h-\Delta x)\ldots(h-n\Delta x)}{1.2\ldots(n+1)} M,$$

d'où

$$(5)\quad f(x-h) = f(x) + \frac{h}{1}\frac{\Delta y}{\Delta x} - \ldots + \frac{h(h-\Delta x)\ldots[h-(n-1)\Delta x]}{1.2\ldots n}\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} - \frac{h(h-\Delta x)\ldots(h-n\Delta x)}{1.2\ldots n+1}\,\mathrm{M}.$$

Revenons sur l'expression de M, savoir,

$$\mathrm{M} = \frac{C_n^{m-1}\frac{\Delta^{n-1}y}{\Delta x^{n-1}} + C_n^{m-2}\frac{\Delta^{n-1}y_1}{\Delta x^{n-1}} + \ldots + C_n^{n}\frac{\Delta^{n-1}y_{m-n-1}}{\Delta x^{n-1}}}{C_n^{m-1} + C_n^{m-2} + \ldots + C_n^{n}}.$$

Nous voyons que cette quantité est une moyenne entre les quotients

$$\frac{\Delta^{n-1}y}{\Delta x^{n-1}},\quad \frac{\Delta^{n-1}y_1}{\Delta x^{n-1}},\ \ldots,\quad \frac{\Delta^{n-1}y_{m-n-1}}{\Delta x^{n-1}},$$

de manière qu'elle est toujours comprise entre le plus grand et le plus petit d'entre eux; il suffit donc, pour que M soit finie, que tous le soient, et alors la remarque que nous venons de faire fournit des limites simples de R_n ou du terme complémentaire de la formule (5).

3. Quand on prend la valeur de Δx infiniment petite, les quotients $\frac{\Delta^k y}{\Delta x^k}$ deviennent les dérivées $f^k(x)$, et les numérateurs des coefficients de l'équation (5) deviennent les puissances entières et croissantes de h. La quantité y_{m-n-1} devient $f(x+h)$. Les quotients dont la quantité M dépend se réduisent donc aux valeurs de $f^{n+1}(z)$, en faisant varier z de x à $x+h$. Donc, si dans cet intervalle $f^{n+1}(z)$ reste finie, M le sera aussi, puisqu'elle est toujours comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de cette dérivée.

De plus, si $f^{n+1}(z)$ est continue, elle atteindra au moins une fois la valeur de M, et l'on pourra poser

$$\mathrm{M} = f^{n+1}(x+\Theta h),$$

en désignant par Θ une quantité positive plus petite que l'unité. Ainsi on retrouve par cette méthode la formule connue

$$f(x-h) = f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x)$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}f^{n+1}(x+\Theta h).$$

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. CHASLES;

PAR M. A. CAYLEY.

« Soient P, P′ des points correspondants de deux figures homographiques; si la droite PP′ passe toujours par un point fixe O, les points P sont situés sur une courbe du troisieme degré, qui passe par ce même point. »

Soient $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}$ les coordonnées de P; $\frac{x'}{w'}, \frac{y'}{w'}, \frac{z'}{w'}$ celles de P′. En supposant que x', y', z', w' sont des fonctions linéaires (sans terme constant) de x, y, z, w, les deux figures seront homographiques.

Soient, de même, $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$ les coordonnées de O; $\frac{\lambda}{\varpi}, \frac{\mu}{\varpi}, \frac{\nu}{\varpi}$ les coordonnées d'un point quelconque T.

Puisque P, P′, O sont sur la même droite, on peut faire passer un plan par les quatre points P, P′, O, T. Cela donne tout de suite l'équation

$$\left\{\begin{matrix} \lambda, & \mu, & \nu, & \varpi \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \\ x, & y, & z, & w \\ x', & y', & z', & w' \end{matrix}\right\} = 0,$$

(en représentant de cette maniere le déterminant formé avec les quantités λ, μ, ν, etc.), équation qui doit etre satisfaite quels que soient $\lambda, \mu, \nu, \varpi$, et qui équivaut ainsi aux deux conditions

$$\left\{\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{matrix}\right\} = 0, \qquad \left\{\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \delta \\ x, & y, & w \\ x', & y', & w' \end{matrix}\right\} = 0$$

Ces deux dernières équations sont du second degré par rapport aux quantités $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}$. Le point P est donc situé à l'intersection de deux surfaces du second ordre. Mais ces surfaces ont en commun la droite représentée par les équations

$$\alpha y - \beta x = 0, \quad \alpha x' - \beta y' = 0.$$

Donc elles se coupent de plus suivant une courbe du troisième degré qui passe évidemment par le point O, parce qu'on satisfait aux équations en écrivant

$$x : \alpha = y : \delta = z : \gamma = w : \delta.$$

MÉMOIRE

SUR

LES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES;

PAR M. A. CAYLEY.

Un des plus beaux résultats des recherches de l'illustre Abel, dans la théorie des fonctions elliptiques, consiste dans les expressions qu'il obtint pour les fonctions inverses $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ (équivalentes à peu près à $\sin am\alpha$, $\cos am\alpha$, $\Delta am\alpha$) en forme de fractions avec un dénominateur commun. Ce dénominateur et les trois numérateurs étant chacun le produit d'une suite infinie double de facteurs, on ne sait pas à quel point Abel avait poussé l'investigation des propriétés de ces nouvelles fonctions; on trouve seulement, dans une Lettre à Legendre, imprimée parmi ses Œuvres, qu'il s'en était occupé. Depuis, les fonctions H, Θ, qui sont essentiellement les mêmes que ces fonctions d'Abel, ont été l'objet des savantes recherches de M. Jacobi, à qui l'on doit, en particulier, la belle formule

$$\log\Theta.\alpha - \log\Theta.0 = \tfrac{1}{2}\alpha^2\left(1 - \frac{E}{K}\right) - k^2\int_0^{\alpha} d\alpha \int_0^{\alpha} d\alpha \sin^2 am\alpha,$$

qui est vraiment fondamentale, et sur laquelle on peut dire que sa théorie est basée. Mais les expressions qu'obtient M. Jacobi pour les fonctions H, Θ, sont sous la forme d'un produit d'une suite infinie simple de facteurs, ce qui ne met pas à beaucoup près si bien en évidence la vraie nature de ces fonctions que les expressions d'Abel; celles-ci sont, en outre, si analogues aux formules en produits infinis des fonctions circulaires, que l'on est seulement étonné que personne ne se soit avisé jusqu'ici de les poser, à priori, comme les définitions

les plus simples des fonctions doublement périodiques, pour en déduire la théorie de ces fonctions. C'est de cette manière que je me propose de traiter ici la question. Je prends pour définitions les formules d'Abel, en supposant, pour plus de généralité, que les fonctions complètes Ω, Υ (K, K′ de M. Jacobi) sont chacune de la forme $A + B\sqrt{-1}$ (ce qui donne lieu à quelques intégrations assez délicates). Et de ces seules équations, sans me servir en rien de la théorie des fonctions elliptiques, je déduis les propriétés fondamentales des fonctions en question, et de là des fonctions elliptiques. On a ainsi quatre fonctions à considérer au lieu des deux H, Θ, dont l'une est pour ainsi dire analogue à un sinus et les autres à des cosinus. Mais ce qu'il y a de remarquable, c'est l'apparition d'un facteur exponentiel qui entre presque partout. On le prévoyait d'après les formules de M. Jacobi, mais ces formules n'expliquent pas, ce me semble, pourquoi ce facteur s'y rencontre : mon analyse le fait voir de la manière la plus satisfaisante. Ce facteur résulte, en effet, de ce que, pour les produits infinis doubles, il ne suffit pas, pour obtenir un résultat déterminé, d'attribuer aux deux entiers variables des valeurs quelconques depuis $-\infty$ jusqu'à ∞, même en supposant l'égalité des valeurs positives et négatives; il faut, en outre, établir une relation entre les valeurs infinies que reçoivent les deux variables. Mais dans les produits que je considère, on démontre qu'en supposant toujours cette égalité des valeurs positives et négatives, quelque liaison que l'on établisse entre les valeurs infinies, il résulte toujours la même valeur du produit, à un facteur exponentiel près, dont l'indice est le carré de x, multiplié par une constante dont la valeur s'exprime au moyen d'une intégrale définie double, et qui dépend de la liaison établie entre les valeurs infinies des variables. C'est-à-dire qu'en multipliant par un facteur exponentiel de cette forme, convenablement choisi, on peut changer à volonté la relation en question sans affecter la valeur du produit. Voilà l'idée fondamentale du Mémoire qui suit.

En me servant de quelques formules de M. Cauchy, relatives à la décomposition des fonctions en fractions simples, j'établis d'une manière rigoureuse des relations entre les trois quotients de mes quatre fonctions, qui sont les mêmes par lesquelles Abel démontre les propriétés fondamentales des fonctions φ, f, F. Ces formules une fois obtenues, on peut supposer connue toute la théorie des fonctions ellip-

tiques. Ces théorèmes de M. Cauchy me conduisent, en outre, à un grand nombre de nouvelles formules qui contiennent des suites infinies doubles. Parmi celles-ci, il y en a une qui me fournit la démonstration du théorème déjà cité de M. Jacobi, théorème duquel il déduit une foule de résultats intéressants. Je finis en citant ceux qui se rapportent de plus près aux fonctions dont je parle. J'espère reprendre une autre fois la considération d'une autre partie de la théorie, dans laquelle j'entrevois des conclusions intéressantes.

Soient Ω, Υ des quantités finies quelconques, assujetties à la seule condition que la fraction $\Omega : \Upsilon$ ne soit pas réelle. En représentant par m, n des entiers positifs ou négatifs quelconques, mettons, pour abréger,

$$(1) \qquad m\Omega + n\Upsilon = (m, n),$$

et considérons une expression de cette forme

$$(2) \qquad u = x\Pi\left\{1 + \frac{x}{(m, n)}\right\},$$

où le symbole Π dénote, à l'ordinaire, le produit d'un nombre infini de facteurs que l'on obtient en donnant à m, n des valeurs entières quelconques, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, en excluant seulement la combinaison ($m = 0$, $n = 0$). Pour qu'une telle expression soit finie, il faut que pour chaque combinaison de valeurs de m, n, il y en ait une autre des mêmes valeurs avec les signes contraires. Cependant, comme on l'a déjà expliqué, cela ne suffit pas pour rendre déterminée la valeur de u. Soit φ une fonction de m, n qui ne change pas en changeant à la fois les signes de ces deux quantités; et imaginons que l'équation

$$\varphi = T$$

représente une courbe fermée, dont tous les points s'éloignent, au cas limite de $T = \infty$, d'une distance infinie de l'origine. Cela posé, en donnant à m, n des valeurs entières qui satisfassent à cette condition $\varphi \leqq T$, et puis faisant $T = \infty$, on obtient pour u une valeur parfaitement déterminée, qui dépend de la forme de la fonction φ. Soit u' ce que devient la fonction u en changeant seulement l'équation

aux limites dans l'équation analogue

$$\varphi' = \mathrm{T}.$$

On peut, pour simplifier, supposer que la courbe représentée par cette équation soit située entièrement en dehors de celle que représente l'équation

$$\varphi = \mathrm{T},$$

mais cela n'est pas essentiel. Il est facile de trouver une relation très-simple qui existe entre ces deux expressions u' et u. En effet,

$$u' : u = \Pi \left\{ 1 + \frac{x}{(m, n)} \right\},$$

en donnant à m, n des valeurs qui satisfassent à la fois aux deux conditions $\varphi > \mathrm{T}$, $\varphi' < \mathrm{T}$. Donc, en considérant toujours ces valeurs,

$$\log u' - \log u = \log \Pi \left\{ 1 + \frac{x}{(m, n)} \right\} = \sum \log \left\{ 1 + \frac{x}{(m, n)} \right\}$$

$$= x \sum \frac{1}{(m, n)} - \tfrac{1}{2} x^2 \sum \frac{1}{(m, n)^2} + \ldots.$$

Dans cette expression, les termes qui contiennent les puissances impaires de x s'évanouissent, à cause des valeurs égales positives et négatives. Mais puisque, à la limite, m, n ne reçoivent que des valeurs infinies, on peut négliger les termes multipliés par x^4, etc. Donc

$$\log u' - \log u = - \tfrac{1}{2} x^2 \sum \frac{1}{(m, n)^2}.$$

ou enfin,

$$(3) \qquad \log u' - \log u = - \tfrac{1}{2} \mathrm{A} x^2, \quad u' = u \varepsilon^{-\frac{1}{2} \mathrm{A} x^2},$$

où j'ai représenté par ε la base du système hyperbolique de logarithmes, et où A est donné par l'équation

$$(4) \qquad \mathrm{A} = \sum \frac{1}{(m, n)^2}.$$

Il est facile de voir que l'on peut changer la sommation en intégration double, et écrire

$$(5) \qquad \mathrm{A} = \int\int \frac{dm\, dn}{(m, n)^2}.$$

entre les mêmes limites qu'auparavant, c'est-à-dire que m, n doivent satisfaire aux deux conditions $\varphi > \mathrm{T}$, $\varphi' < \mathrm{T}$.

Prenons par exemple, pour limite supérieure,

$$(m^2 = \mathrm{m}^2, \quad n^2 = \mathrm{n}^2),$$

et pour limite inférieure,

$$(m^2 + n^2 = \mathrm{T}^2);$$

m, n sont censés contenir T comme facteur, de manière qu'ils deviennent infinis avec cette quantité; on suppose aussi $\mathrm{m} > \mathrm{T}$, $\mathrm{n} > \mathrm{T}$, mais cela est seulement pour la clarté.

Il devient nécessaire à ce point de définir de plus près les valeurs de Ω, Υ; nous écrirons

$$(6) \qquad \Omega = \omega + \omega' i, \quad \Upsilon = \upsilon + \upsilon' i,$$

où $i = \sqrt{-1}$; $\omega, \omega', \upsilon, \upsilon'$ sont des quantités réelles, telles que $\omega\upsilon' - \omega'\upsilon$ ne s'évanouit pas; c'est la condition pour que $\Omega : \Upsilon$ contienne une partie imaginaire.

Avec les coordonnées polaires

$$(7) \qquad \mathrm{A} = \int\int \frac{dr\,d\theta}{r(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)} = \int^{\mathrm{r}} \frac{d\theta(\log \mathrm{r} - \log 1)}{(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)^2},$$

en représentant par r ce que devient r à la limite supérieure; l'intégrale doit être prise depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$. On voit tout de suite que la partie qui contient log T s'évanouit; donc

$$\mathrm{A} = \int_0^{2\pi} \frac{\log \mathrm{r}\,d\theta}{(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)}.$$

Soit α un angle positif plus petit que $\frac{\pi}{2}$, tel que $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$, on a évidemment

$$\mathrm{r} = \frac{\pm \mathrm{m}}{\cos\theta},$$

depuis $\theta = -\alpha$ jusqu'à $\theta = +\alpha$, ou depuis $\theta = \pi - \alpha$ jusqu'à $\theta = \pi + \alpha$, et

$$\mathrm{r} = \frac{\pm \mathrm{n}}{\cos\theta},$$

depuis $\theta = \alpha$ jusqu'à $\theta = \pi - \alpha$, ou depuis $\theta = \pi + \alpha$ jusqu'à $\theta = 2\pi - \alpha$

(le signe ambigu, de manière que r soit toujours positif). En réunissant les parties opposées de l'intégrale, on obtient

$$A = 2\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(\log m - \log\cos\theta)\,d\theta}{(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)^2} + 2\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{(\log n - \log\sin\theta)\,d\theta}{(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)^2},$$

ou, en mettant dans la seconde intégrale $\frac{\pi}{2} - \alpha = \alpha'$, et $\frac{\pi}{2} - \theta$ au lieu de θ.

$$A = 2\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(\log m - \log\cos\theta)\,d\theta}{(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)^2} + 2\int_{-\alpha'}^{\alpha'} \frac{(\log n - \log\cos\theta)\,d\theta}{(\Upsilon\cos\theta + \Omega\sin\theta)^2}.$$

La première intégrale se réduit à

$$-2\left(\log m - \log\cos\theta\,\frac{1}{\Upsilon(\Omega + \Upsilon\tang\theta)}\right)\text{(entre les limites)}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\tang\theta\,d\theta}{(\Omega + \Upsilon\tang\theta}$$

$$= \frac{4(\log m - \log\cos\alpha)\tang\alpha}{\Omega^2 - \Upsilon^2\tang^2\alpha} - 4\int_0^{\alpha}\frac{\tang^2\theta\,d\theta}{\Omega^2 - \Upsilon^2\tang^2\theta}$$

$$= \frac{4(\log m - \log\cos\alpha)\tang\alpha}{\Omega^2 - \Upsilon^2\tang^2\alpha} - \frac{4}{\Omega^2 - \Upsilon^2}\int_0^{\alpha} d\theta\left[1 - \frac{\Omega^2(1 + \tang^2\theta)}{\Omega^2 - \Upsilon^2\tang^2\theta}\right].$$

L'intégrale, dans cette formule

$$\int_0^{\alpha}\frac{(1 + \tang^2\theta)\,d\theta}{\Omega^2 - \Upsilon^2\tang^2\theta} = \int_0^{\tang\alpha}\frac{dx}{\Omega^2 - \Upsilon^2x^2},$$

s'exprime tout de suite par les logarithmes, mais il faut apporter une attention particulière à la manière de déterminer quelle valeur doit être attribuée à ce logarithme, dans le cas où la partie réelle en est négative. Je renvoie cette discussion à une Note. Voici le résultat auquel j'arrive.

En représentant par Lu la valeur principale du logarithme de u, quand il y a une valeur principale (c'est-à dire quand la partie réelle de u est positive), et écrivant

$$\mathrm{L}_{\pm\pi i}\,u = \mathrm{L}u, \quad \text{ou} \quad \mathrm{L}\,-u \pm \pi i,$$

selon qu'il y a une valeur principale de $\log u$, ou de $\log(-u)$, on a

$$8 \qquad \int_0^{\tang\alpha}\frac{dx}{\Omega^2 - \Upsilon^2x^2} = \frac{1}{2\Omega\Upsilon}\,\mathrm{L}_{\pm\pi i}\left(\frac{\Omega + \Upsilon\tang\alpha}{\Omega - \Upsilon\tang\alpha}\right).$$

en prenant le signe supérieur pour $\omega\upsilon' - \omega'\upsilon$ positif, et le signe inférieur pour $\omega\upsilon' - \omega'\upsilon$ négatif.

La première partie de A se réduit donc à

$$\frac{4\left(\log m - \log\cos\alpha\right)\operatorname{tang}\alpha}{\Omega^2 - \Upsilon^2\operatorname{tang}^2\alpha} + \frac{4}{\Omega^2 + \Upsilon^2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\frac{\Omega}{\Upsilon}\,\mathrm{L}\pm\pi\,\frac{\Omega - \Upsilon\operatorname{tang}\alpha}{\Omega + \Upsilon\operatorname{tang}\alpha}\right),$$

ou, en rétablissant la valeur de α, à

$$\frac{4\,mn\log\sqrt{m^2 + n^2}}{m^2\Omega^2 - n^2\Upsilon^2} + \frac{4}{\Omega^2 + \Upsilon^2}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{n}{m} - \frac{1}{2}\frac{\Omega}{\Upsilon}\,\mathrm{L}\pm\pi\,\frac{m\Omega - n\Upsilon}{m\Omega + n\Upsilon}\right).$$

Pour avoir la seconde partie de A, il faut changer m, n, Ω, Υ en n, m, Υ, Ω. En faisant cela, on change le signe de $\omega\upsilon' - \omega'\upsilon$; ainsi il faut écrire $\mathrm{L}_{\mp\pi i}$ au lieu de $\mathrm{L}_{\pm\pi i}$. En réunissant les deux parties, et mettant $\frac{\pi}{2}$ au lieu de $\operatorname{arc\,tang}\frac{n}{m} + \operatorname{arc\,tang}\frac{m}{n}$, on obtient enfin

$$9 \qquad A = \frac{2}{\Omega^2 + \Upsilon^2}\left\{\pi - \frac{\Omega}{\Upsilon}\,\mathrm{L}\pm\pi\left(\frac{m\Omega + n\Upsilon}{m\Omega - n\Upsilon}\right) - \frac{\Upsilon}{\Omega}\,\mathrm{L}\pm\pi\left(\frac{n\Upsilon + m\Omega}{n\Upsilon - m\Omega}\right)\right\},$$

formule que l'on pourrait rendre plus simple en distinguant les deux cas où le premier ou le second logarithme a une valeur principale: mais il vaut mieux la laisser sous cette forme.

On aurait pu croire que la valeur de A pourrait s'obtenir plus facilement en réduisant A à la différence de deux intégrales définies, les conditions pour les limites étant données, dans la première, par $m^2 < m^2$, $n^2 < n^2$, et, pour la seconde, par $m^2 + n^2 < T^2$, en désignant généralement les coordonnées par m, n. Cependant, de cette manière, on admet dans les deux intégrales les valeurs $m = 0$, $n = 0$, qui rendent infinie la fonction à intégrer. Ainsi la valeur de l'intégrale dépendrait du choix des variables, et l'on obtiendrait des résultats inexacts. Autrement dit, on obtiendrait de cette façon la valeur de A, à une quantité ∇ près, qui est la différence de deux intégrales de la même forme, entre des limites $m^2 < \mu^2$, $n^2 < \nu^2$ ou $m^2 + n^2 < T^2$, μ, ν, τ des quantités infiniment petites. On voit tout de suite que ∇ n'est pas pour cela infiniment petit (en effet, sa valeur dépend du rapport $\mu : \nu$ et nullement des valeurs absolues de ces quantités), et, pour en trouver la valeur, il faudrait se servir de l'analyse précédente.

Soit, comme exemple, $\frac{m}{n} = \infty$.

$$A = \frac{2}{\Omega + \Upsilon}\left\{\pi - \frac{\Omega}{\Upsilon} L_{=\pi}(1) - \frac{\Upsilon}{\Omega} L_{=\pi}(-1)\right\}$$

$$= \frac{2\pi}{\Omega^2 - \Upsilon^2}\left(1 \pm \frac{\Upsilon i}{\Omega}\right) = \frac{2\pi}{\Omega(\Omega \mp \Upsilon i)} = -\frac{2\pi i}{\Omega\Upsilon} \cdot \frac{\Upsilon}{\Omega \mp \Upsilon i}.$$

De même, pour $\frac{n}{m} = \infty$.

$$A = \frac{2}{\Omega - \Upsilon}\left\{\pi - \frac{\Omega}{\Upsilon} L_{=\pi}(-1) - \frac{\Upsilon}{\Omega} L_{=\pi}(1)\right\}$$

$$= \frac{2\pi}{\Omega - \Upsilon}\left(1 \mp \frac{\Omega i}{\Upsilon}\right) = \pm \frac{2\pi i}{\Upsilon(\Omega \mp \Upsilon i)} = \mp \frac{2\pi i}{\Omega\Upsilon} \cdot \frac{\Omega}{\Omega \mp \Upsilon i}.$$

En représentant par A', A'' ces deux valeurs de A, on a

$$10 \qquad A' - A'' = \frac{\mp 2\pi i}{\Omega\Upsilon} = -2\delta,$$

où j'écris

$$11 \qquad \delta = \pm \frac{\pi i}{\Omega\Upsilon},$$

en prenant toujours le signe supérieur pour $\omega\upsilon' - \omega'\upsilon$ positif, et le signe inférieur pour $\omega\upsilon' - \omega'\upsilon$ négatif.

Soient u_ε ce que devient u en prenant $\frac{m}{n} = \infty$, $u_{-\varepsilon}$ ce que devient cette même fonction en prenant $\frac{n}{m} = \infty$; on a évidemment

$$u_{-\varepsilon} : u_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(A' - A'')\varepsilon^2} = \varepsilon^{\delta\varepsilon^2}.$$

On peut donc s'imaginer une fonction U donnée par les équations

$$12 \qquad U = \varepsilon^{-\frac{1}{2}\delta\varepsilon^2} u_{-\varepsilon} = \varepsilon^{\frac{1}{2}\delta\varepsilon^2} u_\varepsilon.$$

On verra dans la suite que u_ε est analogue à la fonction $H(u)$ de M. Jacobi. Il convient cependant, pour la symétrie, de considérer, au lieu de u_ε, la nouvelle fonction U qui vient d'être définie. Quoique suffisamment donnée par ces équations, nous allons en chercher encore une autre définition. Pour cela, il faut trouver la valeur de l'in-

tégrale définie qui détermine A, prise depuis la même limite inférieure jusqu'à celle donnée par l'équation

$$\text{mod. } m.n = \mathrm{T}.$$

Mettons, comme auparavant,

$$m = r\cos\theta, \qquad n = r\sin\theta;$$

soient aussi

$$\Omega_1 = \omega - \omega' i, \quad \Upsilon_1 = \upsilon - \upsilon' i.$$

L'équation pour la limite supérieure se réduit à

$$r^2(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)(\Omega_1\cos\theta + \Upsilon_1\sin\theta) = \mathrm{T}^2,$$

et celle pour la limite inférieure, à

$$r = \mathrm{T}.$$

On trouve tout de suite

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{A} &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\log\frac{(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)(\Omega_1\cos\theta + \Upsilon_1\sin\theta)}{(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)^2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\Upsilon}\frac{1}{(\Omega + \Upsilon\tang\theta)}\log(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)(\Omega_1\cos\theta + \Upsilon_1\sin\theta)\ \text{entre } \theta = 0,\ \theta = 2\pi \\
&= -\frac{1}{2\Upsilon}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\Omega + \Upsilon\tang\theta}\left(\frac{\Upsilon - \Omega\tang\theta}{\Omega + \Upsilon\tang\theta} + \frac{\Upsilon_1 - \Omega_1\tang\theta}{\Omega_1 + \Upsilon_1\tang\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{\Upsilon}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\Omega + \Upsilon\tang\theta}\left(\frac{\Upsilon - \Omega\tang\theta}{\Omega + \Upsilon\tang\theta} + \frac{\Upsilon_1 - \Omega_1\tang\theta}{\Omega_1 + \Upsilon_1\tang\theta}\right).
\end{aligned}\right.$$

D'abord

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\Omega + \Upsilon\tang\theta}\,\frac{\Upsilon - \Omega\tang\theta}{\Omega + \Upsilon\tang\theta} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\mathrm{M}}{\Omega + \Upsilon\tang\theta} - \frac{\mathrm{M}}{\Omega + \Upsilon\tang\theta}\right)d\theta.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\Omega + \Upsilon\tang\theta} = 2\Omega\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\Omega - \Upsilon\tang^2\theta} = \frac{2\Omega}{\Omega^2 + \Upsilon^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 + \frac{\Upsilon\tang\theta}{\Omega - \Upsilon\tang\theta}\right]d\theta$$

$$= \frac{2\Omega}{\Omega^2 + \Upsilon^2}\left\{\theta + \frac{\Upsilon}{2\Omega}\mathrm{L}\,\pi\left(\frac{\Omega + \Upsilon\tang\theta}{\Omega - \Upsilon\tang\theta}\right)\right\}\ \text{entre } \theta = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2\Omega}{\Omega^2 + \Upsilon^2}\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{2\Omega}\pi i\right) = \frac{\pi}{\Omega \mp \Upsilon i}.$$

On a de même, en remarquant qu'en changeant Ω, Υ en Υ, Ω, on change le signe de $\omega\upsilon' - \omega'\upsilon$,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Omega_1 + \Upsilon_1 \operatorname{tang}\theta} = \frac{\pi}{\Omega_1 \pm \Upsilon_1 i}.$$

D'un autre côté,

$$M = \frac{\Upsilon\Upsilon_1 + \Omega\Omega_1}{\Upsilon\Omega_1 - \Upsilon_1\Omega}, \quad M_1 = -\frac{\Upsilon_1^2 + \Omega^2}{\Upsilon\Omega_1 - \Upsilon_1\Omega};$$

cela donne

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Omega + \Upsilon \operatorname{tang}\theta} \frac{\Upsilon_1 - \Omega_1 \operatorname{tang}\theta}{\Omega_1 + \Upsilon_1 \operatorname{tang}\theta} = \frac{\pi}{\Upsilon\Omega_1 - \Upsilon_1\Omega} \left\{ \frac{\Upsilon\Upsilon_1 + \Omega\Omega_1}{\Omega \mp \Upsilon i} - (\Omega \mp \Upsilon i) \right\}$$

$$= \frac{\pi}{\Upsilon\Omega_1 - \Upsilon_1\Omega} \frac{\Upsilon\Upsilon_1 + \Omega\Omega_1 - \overline{\Omega \mp \Upsilon i}\,\overline{\Omega_1 \pm \Upsilon_1 i \mp 2\Upsilon_1 i}}{\Omega \mp \Upsilon i} = \pm \frac{\pi i}{\Omega \mp \Upsilon i} \pm \frac{2\Upsilon_1 \pi i}{\Upsilon\Omega_1 - \Upsilon_1\Omega},$$

ou enfin

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Omega + \Upsilon \operatorname{tang}\theta} \frac{\Upsilon_1 - \Omega_1 \operatorname{tang}\theta}{\Omega_1 + \Upsilon_1 \operatorname{tang}\theta} = \pm \frac{\pi i}{\Omega \mp \Upsilon i} \pm \frac{\pi \Upsilon_1}{\omega\upsilon' - \omega'\upsilon};$$

et de même

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\Omega + \Upsilon \operatorname{tang}\theta)^2} \frac{\Upsilon - \Omega \operatorname{tang}\theta}{} = \frac{\pm \pi i}{\Omega \mp \Upsilon i},$$

en omettant seulement le dernier terme de l'autre intégrale; ce que l'on peut vérifier, au reste, en différentiant par rapport à Ω, Υ l'équation

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Omega + \Upsilon \operatorname{tang}\theta} = \frac{\pi}{\Omega \mp \Upsilon i}.$$

On a donc, en ajoutant les deux parties qui composent l'intégrale,

14 $$A = \mp \frac{2\pi i}{\Omega\Upsilon} \frac{\Omega}{\Omega \mp \Upsilon i} \mp \frac{\Upsilon_1 \pi}{\Upsilon(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)}.$$

Il est facile de voir, en écrivant

$$A = \mp \frac{2\pi i}{\Omega\Upsilon} \frac{\Omega}{\Omega \mp \Upsilon i} \pm \frac{\pi \Upsilon i}{\Upsilon(\Upsilon\Omega - \Upsilon\Omega)},$$

que cette expression ne mettant pas de valeur en mettant Ω_1, Υ_1, Ω, Υ au lieu de Ω, Υ, Ω_1, Υ_1, pourvuqu'on change aussi le signe de i ; cela doit évidemment être ainsi et peut servir de vérification.

Soit, pour un moment, u_1 ce que devient u en prenant pour limite l'équation

$$m^2 + n^2 = T^2,$$

et supposons que dans la fonction u on ait pour limite l'équation

$$\text{mod.}(m, n) = T.$$

En retenant la valeur de A, qui vient d'être trouvée,

$$u = \varepsilon^{-\frac{1}{2}Ax^2} u_1;$$

mais aussi

$$U = \varepsilon^{\mp \frac{1}{2}\frac{\pi i}{\Omega\Upsilon}x^2} u_{-\varepsilon} = \varepsilon^{\left(\mp \frac{1}{2}\frac{\pi i}{\Omega\Upsilon} \pm \frac{\pi i}{\Omega\Upsilon}\frac{\Omega}{\Omega \mp \Upsilon i}\right)x^2} u_1,$$

à cause de l'équation, conséquence facile des résultats précédents,

$$u_{-\varepsilon} = \varepsilon^{\mp \frac{\pi i}{\Omega\Upsilon}\frac{\Omega}{\Omega \mp \Upsilon i}x^2} u_1.$$

En éliminant u_1, on obtient, entre u, U, une équation de la forme

$$(15) \qquad U = \varepsilon^{-\frac{1}{2}Bx^2} u,$$

dans laquelle

$$B = -A \pm \frac{\pi i}{\Omega\Upsilon} \mp \frac{2\pi i}{\Omega \mp \Upsilon i} = \pm \frac{\pi i}{\Omega\Upsilon} \pm \frac{\Upsilon\pi}{\Upsilon(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)}$$

$$= \frac{\pm\pi}{\Omega\Upsilon(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)}[2(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon) + (\omega + \omega' i)(\upsilon - \upsilon' i)],$$

ou enfin

$$(16) \qquad B = \frac{\pm\pi(\omega\upsilon' + \omega'\upsilon)}{\Omega\Upsilon(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)} = \frac{\pi(\omega\upsilon' + \omega'\upsilon)}{\Omega\Upsilon\,\text{mod.}(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)}.$$

En rassemblant tous ces résultats, on a le système de formules

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{U} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}\mathrm{B}x^2} u = \varepsilon^{-\frac{1}{2}\xi x^2} u_{-\xi} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}\xi x^2} u_{\xi},\\
&u = \varepsilon^{\frac{1}{2}(\mathrm{B}-\xi)x^2} u_{-\xi} = \varepsilon^{\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\xi)x^2} u_{\xi},\\
&\xi = \frac{\pi i}{\Omega\Upsilon}\,\frac{(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)}{\text{mod.}\,(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)},\\
&\mathrm{B} = \frac{\pi\,(\omega\upsilon + \omega'\upsilon')}{\text{mod.}\,(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)},\\
&u,\ u_{\xi},\ u_{-\xi} \text{ des fonctions de la forme}
\end{aligned}
\right.
$$

A

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\qquad x\,\Pi\left\{1 + \frac{x}{(m, n)}\right\},\\
&\text{mais avec des limites différentes, savoir :}\\
&\text{mod. } m, n = \mathrm{T}, \quad \mathrm{T} = \infty, \text{ pour la fonction } u;\\
&m^2 = \mathrm{m}^2,\ n^2 = \mathrm{n}^2, \quad \mathrm{m} = \infty,\ \mathrm{n} = \infty,\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} = \infty, \text{ pour } u;\\
&m^2 = \mathrm{m}^2,\ n^2 = \mathrm{n}^2, \quad \mathrm{m} = \infty,\ \mathrm{n} = \infty,\ \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}} = \infty, \text{ pour } u_{-\xi}.
\end{aligned}
\right.
$$

A présent, il importe de remarquer que la fonction u_ξ est périodique à l'égard de Ω, de la manière d'un sinus ou d'un cosinus, mais ne l'est pas à l'égard de Υ; de même $u_{-\xi}$ est périodique à l'égard de Υ, mais non à l'égard de Ω. Quant à U, u, elles ne sont simplement périodiques ni à l'égard de Ω, ni à l'égard de Υ. Pour démontrer cela, considérons, par exemple, l'équation

$$
(17) \qquad u_\xi = x\,\Pi\left(1 + \frac{x}{(m, n)}\right)
$$

m depuis $-\mathrm{m}$ jusqu'à m, n depuis $-\mathrm{n}$ jusqu'à n, $\mathrm{m} = \infty$, $\mathrm{n} = \infty$, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} = \infty$, le système ($\mathrm{m} = 0$, $\mathrm{n} = 0$) toujours exclu); en représentant par u'_ξ ce que devient u_ξ quand on écrit $x + \Omega$ au lieu de x, on a évidemment

$$
\begin{aligned}
u_\xi &= (x + \Omega)\,\Pi\left(1 + \frac{x + \Omega}{(m, n)}\right)\\
&= -x\,\Pi\left(1 + \frac{1}{(m+1, n)}\right) : \Pi\,\frac{(m+1, n)}{(m, n)}.
\end{aligned}
$$

en admettant dans le premier produit la combinaison $m = 0$, $n = 0$, mais excluant $m + 1 = 0$, $n = 0$, et excluant l'une et l'autre du second produit. Cette équation est de la forme

$$u_2 = \Lambda' x \Pi \left(1 + \frac{x}{(m+1, n)}\right),$$

avec les mêmes limites que dans u ; donc

$$u_2 : u_1 = \Lambda' \Pi \left(1 + \frac{x}{(m+1, n)}\right) : \Pi \left(1 + \frac{x}{(m, n)}\right)$$

où Π se rapporte à la seule variable n qui doit s'étendre depuis $-n$ jusqu'à n. Puisqu'ainsi n ne reçoit jamais des valeurs qui soient comparables à m, chacun de ces produits se réduit à l'unité, et l'on obtient

$$u_1 : u_2 = \Lambda',$$

ou enfin

(18) $$u_1 : u_2 = -u_2,$$

en posant

$$x = -\tfrac{1}{2}\Omega,$$

et remarquant que u est fonction impaire de x, ce qui donne

$$\Lambda' = -1.$$

Soit de même u_3 ce que devient u_2 en changeant x en $x + \Upsilon$. On a pareillement

$$u_3 : u_2 = \Lambda'' \Pi \left(1 + \frac{x}{(m, n+1)}\right) : \Pi \left(1 + \frac{x}{(m, n)}\right)$$

où Π se rapporte à la seule variable m. Mais ici les produits ne se réduisent point à l'unité ; en effet,

$$\Pi \left(1 + \frac{x}{(m, n+1)}\right) \quad \text{ou} \quad \Pi \left(1 + \frac{x}{(m, n)}\right)$$

$$(x + n\Upsilon)^{\Upsilon} \Pi \left(1 + \frac{x + n\Upsilon}{m\Omega}\right) : n\Upsilon \Pi \left(1 + \frac{n\Upsilon}{m\Omega}\right)$$

$$= \sin \frac{\pi x}{\Omega} (x + n\Upsilon)^{\Upsilon} : \sin \frac{\pi \Upsilon}{\Omega} n\Upsilon$$

Mais quand la partie imaginaire de θ est infinie, on trouve

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(\varepsilon^{\theta i} - \varepsilon^{-\theta i}\right) = \pm\frac{1}{2i}\varepsilon^{\pm\theta i},$$

selon que la partie réelle de θi est positive ou négative. Or la partie réelle de $\frac{i\Upsilon}{\Omega}$ est de signe contraire à $\omega v' - \omega' v$; on a donc

$$\Pi\left(1 + \frac{x}{(m, n+1)}\right) = \varepsilon^{\mp\frac{\pi i}{\Omega}x} = \varepsilon^{-\varepsilon\Upsilon x};$$

de même,

$$\Pi\left(1 + \frac{x}{(m, -n)}\right) = \varepsilon^{\varepsilon\Upsilon x}.$$

et de là

$$u''_\varepsilon = A''\varepsilon^{-2\varepsilon\Upsilon x}u_\varepsilon, \tag{19}$$

équation de la même forme que celle que l'on obtiendrait en posant

$$u_\varepsilon = \varepsilon^{-\varepsilon x^2}u_{-\varepsilon},$$

et remarquant que $u_{-\varepsilon}$ est périodique à l'égard de Υ. On voit aussi qu'en sommant par rapport à m, il est permis d'exprimer u_ε par un produit infini simple, dont chaque facteur est de la forme

$$\sin\frac{\pi i}{\Omega}(x + n\Upsilon),$$

mais qu'on n'arrive pas à un tel résultat, en sommant par rapport à n. En effet, l'équation

$$u_\varepsilon = \varepsilon^{-\varepsilon x^2}u_{-\varepsilon}$$

fait voir que u_ε s'exprime par un tel produit où chaque terme est de la forme

$$\sin\frac{\pi i}{\Upsilon}(x + m\Omega),$$

multiplié par le facteur exponentiel $\varepsilon^{-\varepsilon x^2}$. On établit de cette façon l'identité, à un facteur constant près, de u_ε à $H(u)$; mais, à présent, pour éviter les longueurs, je ne me propose de considérer aucun de ces produits infinis simples.

Il faut maintenant, pour le développement de la théorie, introduire les trois fonctions qui correspondent au cosinus. Mettant, pour abréger,

$$\bar{m} = m + \tfrac{1}{2}, \quad \bar{n} = n - \tfrac{1}{2}, \tag{20}$$

j'écris

Limites.

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} \mathrm{y}x = \varepsilon^{-\frac{\mathrm{B}x^2}{2}} x \Pi \left\{ 1 - \dfrac{x}{(m, n)} \right\}, & \text{mod. } (m, n) = \mathrm{T},\ \mathrm{T} = \infty \\ \mathrm{g}x = \varepsilon^{-\frac{\mathrm{B}x^2}{2}} \Pi \left\{ 1 - \dfrac{x}{(\bar{m}, n)} \right\}, & \text{mod. } (\bar{m}, n) = \mathrm{T}, \\ \mathrm{G}x = \varepsilon^{-\frac{\mathrm{B}x^2}{2}} \Pi \left\{ 1 - \dfrac{x}{(m, \bar{n})} \right\}, & \text{mod. } (m, \bar{n}) = \mathrm{T}, \\ \mathrm{Z}x = \varepsilon^{-\frac{\mathrm{B}x^2}{2}} \Pi \left\{ 1 - \dfrac{x}{(\bar{m}, \bar{n})} \right\}, & \text{mod. } (\bar{m}, \bar{n}) = \mathrm{T}. \end{cases}$$

En représentant par $\mathrm{y}_2 x$, $\mathrm{y}_{-2} x$, etc., ce que deviennent ces fonctions, et prenant pour limites

$$(m^2 = \mathrm{m}^2,\ n^2 = \mathrm{n}^2), \quad (m^2 = \bar{\mathrm{m}}^2,\ n^2 = \mathrm{n}^2),$$
$$(m^2 = \mathrm{m}^2,\ n^2 = \bar{\mathrm{n}}^2), \quad (m^2 = \bar{\mathrm{m}}^2,\ n^2 = \bar{\mathrm{n}}^2),$$

ou

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} = \infty \text{ pour } \mathrm{y}_2 x, \text{ etc.}, \quad \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}} = \infty \text{ pour } \mathrm{y}_{-2} x, \text{ etc.}$$

on a, en général, en mettant J au lieu de l'une quelconque des lettres y, g, G, Z,

$$\mathrm{J}x = \varepsilon^{\frac{\mathrm{B}x^2}{2}} \mathrm{J}_2 x = \varepsilon^{-\frac{\mathrm{B}x^2}{2}} \mathrm{J}_{-2} x. \tag{21}$$

où $\mathrm{J}_2 x$ est périodique à l'égard de Ω, et $\mathrm{J}_{-2} x$ à l'égard de Υ. C'est cette équation remarquable qui définit la loi de périodicité des fonctions J, et de laquelle se déduisent presque toutes les propriétés de ces fonctions.

Il est clair qu'en changeant entre elles les quantités Ω, Υ (quantités que nous désignerons comme les *fonctions complètes*), on ne change pas les fonctions $\mathrm{y}x$, $\mathrm{Z}x$, tandis que $\mathrm{g}x$ se change en $\mathrm{G}x$, et $\mathrm{G}x$ en $\mathrm{g}x$. On change de cette manière ξ en $-\xi$ et B en $-\mathrm{B}$ (par exemple, $\mathrm{y}_2 x$ se

change en $y_{-\varepsilon}x$, etc.). Cette considération fait voir que toute propriété des fonctions J est double, et donne le moyen le plus facile pour passer d'une propriété quelconque à la propriété correspondante.

On tire immédiatement des définitions mêmes les équations

$$(C)\begin{cases} y(-x) = -yx, & g(-x) = gx, & G(-x) = Gx, & Z(-x) = Zx; \\ yo = o, & go = 1, & Go = 1, & Zo = 1; \\ y'o = 1. \end{cases}$$

Il est facile de démontrer, de la même manière dont nous avons prouvé la périodicité de $J_\varepsilon x$ à l'égard de Ω, que ces fonctions se changent l'une en l'autre, à un facteur constant près, en changeant x en $x+\frac{1}{2}\Omega$. Faisant donc attention à l'équation qui lie ensemble Jx et $J_\varepsilon x$, on obtient le système de formules

$$(22)\begin{cases} y(x+\frac{1}{2}\Omega) = \varepsilon^{\frac{1}{2}\varepsilon\Omega x} A.gx, \\ g(x+\frac{1}{2}\Omega) = \varepsilon^{\frac{1}{2}\varepsilon\Omega x} B.yx, \\ G(x+\frac{1}{2}\Omega) = \varepsilon^{\frac{1}{2}\varepsilon\Omega x} C.Zx, \\ Z(x+\frac{1}{2}\Omega) = \varepsilon^{\frac{1}{2}\varepsilon\Omega x} D.Zx. \end{cases}$$

Pour déterminer A, B, C, D, posons

$$x = o \quad \text{ou} \quad x = -\tfrac{1}{2}\Omega.$$

En écrivant, pour abréger,

$$(D) \qquad \varepsilon^{\varepsilon\Omega^2} = \varepsilon^{-\frac{\pi\Omega i}{Y}} = q_1^{-1},$$

on trouve

$$(23)\begin{cases} A = y\left(\frac{\Omega}{2}\right), \\ B = -q_1^{-\frac{1}{2}} : y(\tfrac{1}{2}\Omega), \\ C = G(\tfrac{1}{2}\Omega) = q_1^{-\frac{1}{2}} : Z(\tfrac{1}{2}\Omega), \\ D = Z(\tfrac{1}{2}\Omega) = q_1^{-\frac{1}{2}} : G(\tfrac{1}{2}\Omega); \end{cases}$$

d'où l'on déduit cette équation de condition

$$(24) \qquad G(\tfrac{1}{2}\Omega)Z(\tfrac{1}{2}\Omega) = q_1^{-\frac{1}{2}}.$$

On a de même le système

$$(25)\quad \begin{cases} y\left(x+\frac{1}{2}\Upsilon\right) = \varepsilon^{-\frac{\pi}{2}(x)} A' G x, \\ g\left(x+\frac{1}{2}\Upsilon\right) = \varepsilon^{-\frac{\pi}{2}(x)} B' Z x, \\ G\left(x+\frac{1}{2}\Upsilon\right) = \varepsilon^{-\frac{\pi}{2}(x)} C' y x, \\ Z\left(x+\frac{1}{2}\Upsilon\right) = \varepsilon^{-\frac{\pi}{2}(x)} D' G x. \end{cases}$$

De là, si

$$\varepsilon^{-\frac{\pi}{2}\Upsilon} = \varepsilon^{\frac{\pi\pi}{\Omega}} = q^{-1},$$

ce qui donne

$$(\mathrm{E})\qquad \log q \log q_{,} = -\pi^2,$$

il résulte

$$(26)\quad \begin{cases} A' = y\left(\frac{1}{2}\Upsilon\right), \\ B' = g\left(\frac{1}{2}\Upsilon\right) = q^{-\frac{1}{4}} : Z\left(\frac{1}{2}\Upsilon\right), \\ C' = -q^{-\frac{1}{4}} : y\left(\frac{1}{2}\Upsilon\right), \\ D' = Z\left(\frac{1}{2}\Upsilon\right) : g\left(\frac{1}{2}\Upsilon\right). \end{cases}$$

d'où nous tirons l'équation de condition

$$(27)\qquad g\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) Z\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) = q^{-\frac{1}{4}}.$$

En posant $x = \frac{1}{2}\Upsilon$ dans l'équation pour $y\left(x+\frac{1}{2}\Omega\right)$ et $x = \frac{1}{2}\Omega$ dans l'équation pour $y\left(x+\frac{1}{2}\Upsilon\right)$, on obtient aussi

$$(28)\qquad y\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) g\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) = -i\, y\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) G\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right),$$

et l'on déduirait cette même équation, ou une équation équivalente, des autres formules, de manière qu'on ne peut pas trouver d'autres équations de condition.

Enfin, en rapprochant ces systèmes, on obtient

$$(29)\quad \begin{cases} y\left(x+\frac{1}{2}\Omega+\frac{1}{2}\Upsilon\right) = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}(x)-\frac{1}{4}} A\, Z x, \\ g\left(x+\frac{1}{2}\Omega+\frac{1}{2}\Upsilon\right) = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}(x)-\frac{1}{4}} B\, g x, \\ G\left(x+\frac{1}{2}\Omega+\frac{1}{2}\Upsilon\right) = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}(x)-\frac{1}{4}} C\, G x, \\ Z\left(x+\frac{1}{2}\Omega+\frac{1}{2}\Upsilon\right) = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}(x)-\frac{1}{4}} D\, y x. \end{cases}$$

avec les équations suivantes pour les coefficients

$$(30)\quad \begin{cases} A'' = (-1)^{\frac{1}{2}}\, y\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) g\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right), \\ B'' = -(-1)^{\frac{1}{2}}\, q_1^{-\frac{1}{2}}\, y\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) : y\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right), \\ C'' = (-1)^{\frac{1}{2}}\, Z\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) Z\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right), \\ D'' = -(-1)^{\frac{1}{4}}\, q^{-\frac{1}{4}}\, Z\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) : y\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right). \end{cases}$$

En rassemblant les équations entre $J\left(\frac{1}{2}\Omega\right)$, $J\left(\frac{1}{2}\Upsilon\right)$, on a

$$(31)\quad \begin{cases} g\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) = 0, \\ G\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) = 0, \\ G\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) Z\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) = q_1^{-\frac{1}{2}}, \\ g\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) Z\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) = q^{-\frac{1}{4}}, \\ y\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) g\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) = -iy\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) G\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right). \end{cases}$$

d'où l'on conclut les formules

$$(32)\quad \begin{cases} B''C'' : A''D'' = B'D' : A'C' = CD : AB = -1, \\ A'B' : C'D' = -A''B' : C''D'' = -y^2\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) : Z^2\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right), \\ A''C'' : B''D'' = -A'C' : B'D' = y^2\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) : Z^2\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right), \\ AD : BC = -A'D' : B'C' = y^2\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) : G^2\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) \\ \qquad = -y^2\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) : g^2\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right), \end{cases}$$

dont nous aurons bientôt besoin.

On peut passer maintenant à ce système général de formules, où j'écris $(-1)^m$ au lieu de $(-1)^m$:

$$\Theta = (-1)^{m(n-1)} \Sigma^{(m,-n)} q^{-\frac{1}{2}m} q^{-\frac{1}{2}n},$$

là, comme toujours, $(m, -n) = m\Omega - nY$;

$$y\{x + (m, n)\} = (-1)^{m+n} \Theta \mathrm{Y}x,$$
$$g\{x + (m, n)\} = -(-1)^m \Theta \mathrm{g}x,$$
$$G\{x + (m, n)\} = (-1)^n \Theta \mathrm{G}x,$$
$$Z\{x + (m, n)\} = \Theta \mathrm{Z}x;$$

$$\Phi = (-1)^{m(n-1)+\frac{n}{2}} \Sigma^{(m,-n)} q^{-\frac{1}{2}m} q^{-\frac{1}{2}n},$$

$$y\{x + (\bar{m}, n)\} = (-1)^{m+n} \Phi \mathrm{A}gx,$$
$$g\{x + (\bar{m}, n)\} = (-1)^m \Phi \mathrm{B}yx,$$
$$G\{x + (\bar{m}, n)\} = (-1)^n \Phi \mathrm{C}Zx,$$
$$Z\{x + (\bar{m}, n)\} = \Phi \mathrm{D}Gx;$$

(F)

$$\Psi = (-1)^{mn+\frac{m}{2}} \Sigma^{(m,-n)} q^{-\frac{1}{2}m} q^{-\frac{1}{2}n};$$

$$y\{x + (m, \bar{n})\} = (-1)^{m+n} \Psi \mathrm{A}Gx,$$
$$g\{x + (m, \bar{n})\} = -(-1)^m \Psi \mathrm{B}Zx,$$
$$G\{x + (m, \bar{n})\} = (-1)^n \Psi \mathrm{C}yx,$$
$$Z\{x + (m, \bar{n})\} = \Psi \mathrm{D}gx;$$

$$\mathrm{N} = (-1)^{mn+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}} \Sigma^{(m,-n)} q^{-\frac{1}{2}m} q^{-\frac{1}{2}n};$$

$$y\{x + (\bar{m}, \bar{n})\} = (-1)^{m+n} \mathrm{N}\mathrm{A}Zx,$$
$$g\{x + (\bar{m}, \bar{n})\} = -(-1)^m \mathrm{N}\mathrm{B}Gx,$$
$$G\{x + (\bar{m}, \bar{n})\} = (-1)^n \mathrm{N}\mathrm{C}gx,$$
$$Z\{x + (\bar{m}, \bar{n})\} = \mathrm{N}\mathrm{D}yx.$$

Soit $x = 0$:

$$
(G)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\Theta_0 = (-)^{mn} q^{-\frac{1}{2}m^2} q^{-\frac{1}{2}n^2};\\
&y(m, n) = 0, \quad y'(m, n) = (-)^{m-n}\Theta_0,\\
&g(m, n) = (-)^m \Theta_0,\\
&G(m, n) = (-)^n \Theta_0,\\
&Z(m, n) = \Theta_0;\\
&\Phi_0 = (-)^{mn-\frac{m}{2}} q^{-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}(m-n)^2},\\
&y(\bar{m}, n) = (-)^{m-n}\Phi_0 A,\\
&g(\bar{m}, n) = 0, \quad g'(\bar{m}, n) = (-)^m \Phi_0 B,\\
&G(\bar{m}, n) = (-)^n \Phi_0 C,\\
&Z(\bar{m}, n) = \Phi_0 D;\\
&\Psi_0 = (-)^{mn-\frac{n}{2}} q^{-\frac{1}{2}m^2} q^{-\frac{1}{2}(n-m)^2},\\
&y(m, \bar{n}) = (-)^{m-n}\Psi_0 A',\\
&g(m, \bar{n}) = (-)^m \Psi_0 B',\\
&G(m, \bar{n}) = 0, \quad G'(m, n) = (-)^n \Psi_0 C',\\
&Z(m, \bar{n}) = \Psi_0 D';\\
&X_0 = (-)^{mn-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}} q^{-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}(m-n)^2},\\
&y(\bar{m}, \bar{n}) = (-)^{m-n} X_0 A'',\\
&g(\bar{m}, \bar{n}) = (-)^m X_0 B'',\\
&G(\bar{m}, \bar{n}) = (-)^n X_0 C'',\\
&Z(\bar{m}, \bar{n}) = 0, \quad Z'(\bar{m}, n) = X_0 D'
\end{aligned}
\right.
$$

On a de suite, en prenant les différentielles des logarithmes des fonctions Jx,

$$\mathrm{H}'\quad\left\{\begin{aligned}
y'x : yx &= -Bx - \sum\{x - (m, n)\}^{-1}, \\
g'x : gx &= -Bx - \sum\{x - (m, n)\}^{-1} \\
G'x : Gx &= -Bx - \sum\{x - (m, n)\}^{-1} \\
Z'x : Zx &= -Bx - \sum\{x - (m, n)\}^{-1}
\end{aligned}\right.$$

(B est le coefficient de x^2, dans l'exponentielle $\varepsilon^{-\frac{1}{2}Bx^2}$ des équations (B); il n'y a pas à craindre de le confondre avec le B qui entre dans les équations pour $y(\overline{m}, n)$, etc. : c'est par hasard que j'ai pris deux fois la même lettre.)

Réduisons en fractions simples la fonction

$$gx\,Gx : yx\,Zx.$$

En écrivant

$$gx\,Gx : yx\,Zx = \sum\{L\{x - (m, n)\}^{-1} - M\{x - (m, n)\}^{-1}\},$$

on obtient

$$L = g(m, n)\,G(m, n) : y'(m, n)\,Z(m, n) = 1,$$

$$M = g(\overline{m}, n)\,G(\overline{m}, n) : y(\overline{m}, n)\,Z'(\overline{m}, n) = B\,C - A\,D.$$

Donc

$$gx\,Gx : yx\,Zx = \sum\{x - (m, n)\}^{-1} - \sum\{x - (m, n)\}^{-1}$$

c'est-à-dire

$$gx\,Gx : yx\,Zx = (y'x : yx) - (Z'x : Zx).$$

(Nous allons bientôt justifier, au moyen d'un théorème de M. Cauchy, l'emploi de cette méthode de décomposition en fractions simples qui ne s'applique pas toujours aux fonctions transcendantes.)

On obtient de même

$$\text{I}\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{g}x\,\mathrm{Z}x : \mathrm{y}x\,\mathrm{G}x &= (\mathrm{y}'x : \mathrm{y}x) - (\mathrm{G}'x : \mathrm{G}x), \\ \mathrm{G}x\,\mathrm{Z}x : \mathrm{y}x\,\mathrm{g}x &= (\mathrm{y}'x : \mathrm{y}x) - (\mathrm{g}'x : \mathrm{g}x), \\ -b^2\,\mathrm{y}x\,\mathrm{Z}x : \mathrm{g}x\,\mathrm{G}x &= (\mathrm{g}'x : \mathrm{g}x) - (\mathrm{G}'x : \mathrm{G}x), \\ e^2\,\mathrm{y}x\,\mathrm{g}x : \mathrm{G}x\,\mathrm{Z}x &= (\mathrm{G}'x : \mathrm{G}x) - (\mathrm{Z}'x : \mathrm{Z}x), \\ c^2\,\mathrm{y}x\,\mathrm{G}x : \mathrm{Z}x\,\mathrm{y}x &= (\mathrm{Z}'x : \mathrm{Z}x) - (\mathrm{y}'x : \mathrm{y}x), \end{aligned}\right.$$

en mettant, pour abréger,

$$\text{J}\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{y}\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) : \mathrm{Z}\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) = \frac{i}{c}\ [*], \\ &\mathrm{y}\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) : \mathrm{Z}\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) = \frac{1}{c}, \\ &\mathrm{y}\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) : \mathrm{G}\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) = -i\,\mathrm{y}\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) : \mathrm{g}\left(\tfrac{1}{2}\Upsilon\right) = \frac{1}{b}. \end{aligned}\right.$$

Donc, en éliminant les fonctions dérivées,

$$\begin{aligned} \mathrm{G}^2x - \mathrm{Z}^2x &= e^2\,\mathrm{y}^2x, \\ \mathrm{g}^2x - \mathrm{G}^2x &= -b^2\,\mathrm{y}^2x, \\ \mathrm{Z}^2x - \mathrm{g}^2x &= c^2\,\mathrm{y}^2x, \end{aligned}$$

ce qui donne, en ajoutant,

$$\text{K}\qquad b^2 = e^2 + c^2, \quad \text{ou} \quad b = \sqrt{e^2 + c^2}.$$

et nous retiendrons désormais la lettre b dans cette signification. Puis

$$\text{L}\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{g}^2x &= \mathrm{Z}^2x - c^2\,\mathrm{y}^2x, \\ \mathrm{G}^2x &= \mathrm{Z}^2x + e^2\,\mathrm{y}^2x. \end{aligned}\right.$$

Soient maintenant

$$\text{M}\quad \left\{\begin{aligned} \varphi x &= \mathrm{y}x : \mathrm{Z}x, \\ fx &= \mathrm{g}x : \mathrm{Z}x, \\ \mathrm{F}x &= \mathrm{G}x : \mathrm{Z}x. \end{aligned}\right.$$

(*) J'ai écrit $\frac{i}{c}$ au lieu de $\frac{1}{c}$ pour me conformer à la notation d'Abel ; il est à peine nécessaire de remarquer que c, e sont, en général, l'une et l'autre des quantités imaginaires.

On obtient

$$(\mathrm{N})\qquad \begin{cases} f^2 x = 1 - c^2 \varphi^2 x, \\ \mathrm{F}^2 x = 1 + c^2 \varphi^2 x; \end{cases}$$

$$(\mathrm{O})\qquad \begin{cases} \varphi' x = f x \, \mathrm{F} x, \\ f' x = - c^2 \varphi x \, \mathrm{F} x, \\ \mathrm{F}' x = c^2 \varphi x f x. \end{cases}$$

Ces équations sont précisément les équations fondamentales d'Abel (*Œuvres*, tome Ier, page 143), et il en déduit

$$(\mathrm{P})\qquad \begin{cases} \varphi(x+y) = \dfrac{\varphi x f y \, \mathrm{F} y + \varphi y f x \, \mathrm{F} x}{1 - c^2 \varphi^2 x \varphi^2 y}, \\ f(x+y) = \dfrac{f x f y - c^2 \varphi x \varphi y \, \mathrm{F} x \mathrm{F} y}{1 - c^2 \varphi^2 x \varphi^2 y}, \\ \mathrm{F}(x+y) = \dfrac{\mathrm{F} x \mathrm{F} y - c^2 \varphi x \varphi y f x f y}{1 + c^2 \varphi^2 x \varphi^2 y}. \end{cases}$$

qui sont les formules connues pour l'addition des fonctions elliptiques.

En effet, on peut écrire l'équation

$$\varphi' x = f x \, \mathrm{F} x$$

sous la forme

$$1 = \frac{\varphi' x}{\sqrt{1 - c^2 \varphi^2 x}\,\sqrt{1 + c^2 \varphi^2 x}}$$

ou, en mettant $y = \varphi x$,

$$(\mathrm{Q})\qquad x = \int_0^{\varphi x} \frac{dy}{\sqrt{1 - c^2 y^2}\,\sqrt{1 + c^2 y^2}}.$$

on peut donc de ce point supposer connues toutes les propriétés des fonctions elliptiques. On a, par exemple,

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\Upsilon\right) = \frac{1}{c}, \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\Omega\right) = \frac{1}{c},$$

et de là

$$(\mathrm{R})\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\Omega = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dy}{\sqrt{1 - c^2 y^2}\,\sqrt{1 + c^2 y^2}}, \\ \frac{1}{2}\Upsilon = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dy}{\sqrt{1 - c^2 y^2}\,\sqrt{1 + c^2 y^2}}. \end{cases}$$

qui déterminent Ω, Υ en fonction de c, e. Il paraît au premier abord que Υ, Ω soient des fonctions parfaitement déterminées de c, e. J'ai des raisons pour croire que cela n'est pas précisément le cas, et que la question admettrait des développements intéressants; mais je réserve ce sujet pour une autre occasion.

On peut, à l'aide des équations entre $y(\frac{1}{2}\Omega)$, etc., et les quantités c, e, exprimer cette suite de fonctions en termes de c, e. On déduit :

$$S \left\{ \begin{array}{ll} y(\tfrac{1}{2}\Omega) = b^{-\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} q_1^{-\frac{1}{4}}, & y(\tfrac{1}{2}\Upsilon) = ib^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{4}}; \\ g(\tfrac{1}{2}\Omega) = 0, & g(\tfrac{1}{2}\Upsilon) = b^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{4}}; \\ G(\tfrac{1}{2}\Omega) = b^{-\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} q_1^{-\frac{1}{4}}, & G(\tfrac{1}{2}\Upsilon) = 0; \\ Z(\tfrac{1}{2}\Omega) = b^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q_1^{-\frac{1}{4}}, & Z(\tfrac{1}{2}\Upsilon) = b^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{4}}; \end{array} \right.$$

et de là

$$I \left\{ \begin{array}{lll} A = b^{-\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} q_1^{-\frac{1}{4}}, & A' = ib^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{4}}, & A'' = (-)^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} q_1^{-\frac{1}{4}} q^{-\frac{1}{4}}; \\ B = -b^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q_1^{-\frac{1}{4}}, & B' = b^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{4}}, & B'' = -(-)^{\frac{1}{2}} ic^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} q_1^{-\frac{1}{4}} q^{-\frac{1}{4}}; \\ C = b^{-\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} q_1^{-\frac{1}{4}}, & C' = -ib^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{4}}, & C'' = (-)^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} q_1^{-\frac{1}{4}} q^{-\frac{1}{4}}; \\ D = b^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{4}}, & D' = b^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{4}}, & D'' = -(-)^{\frac{1}{2}} ic^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} q_1^{-\frac{1}{4}} q^{-\frac{1}{4}}; \end{array} \right.$$

qu'on doit introduire dans toutes les formules où entrent les quantités A, B, etc.

Voici le théorème de M. Cauchy (*Exercices de Mathématiques*, tome II, page 289) :

« Si, en attribuant au module r de la variable

$$z = r(\cos p + i \sin p)$$

des valeurs infiniment grandes, on peut les choisir de manière que les deux fonctions

$$\frac{fz + f(-z)}{2}, \quad \frac{fz - f(-z)}{2z}$$

deviennent sensiblement nulles, quel que soit l'angle p, ou du moins que chacune de ces fonctions reste toujours finie ou infiniment petite, et ne cesse d'être infiniment petite, en demeurant finie, que dans le

voisinage de certaines valeurs particulières de p, on aura

$$fx = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(r)}{x-r},$$

pourvu qu'on réduise le résidu intégral à sa valeur principale.

On se rappelle que cela veut dire qu'en supposant ces conditions satisfaites, la fonction fx peut s'exprimer de la manière ordinaire comme la somme d'une suite de fractions simples, mais qu'il faut étendre d'abord la sommation aux racines de l'équation

$$\frac{1}{fx} = 0,$$

dont les modules sont inférieurs à une certaine limite qu'on fait alors infinie.

Soit, par exemple,

$$(33) \qquad fx = \frac{T_1 x}{T x},$$

où Tx, T_1x ne contiennent que des facteurs qui sont des puissances entières des fonctions yx, gx, Gx, Zx. En supposant que r n'est d'aucune des formes

$$\text{mod}\,(m, n), \quad \text{mod}\,(m, n'), \quad \text{mod}\,(m, n''), \quad \text{mod}\,(m, n'''),$$

mais, d'ailleurs, une quantité infinie quelconque, on peut toujours écrire

$$(34) \qquad \xi = r\cos p + i\sin p = m + n\sqrt{-1} + \zeta,$$

où ζ est une quantité finie telle qu'aucune des fonctions $y\zeta$, $g\zeta$, $G\zeta$, $Z\zeta$ ne s'évanouit. m, n sont des entiers dont l'un au moins est infini, mais qui varient depuis $-\infty$ jusqu'à ∞, avec l'angle p. Soit $\varkappa$ le degré de Tx, $\varkappa_1$ celui de T_1x à l'égard de yx, etc., soit aussi $\lambda = \varkappa + \varkappa_1 + \ldots$; on a, en général, une équation de cette forme

$$(35) \qquad fx = \xi^{\lambda} + \ldots + q\xi^{\varkappa} + q_1\xi^{\varkappa_1} + \ldots + F,$$

où F est fini. En supposant donc que la partie réelle de

$$(36) \qquad \xi^{\lambda}(m, n^{\varkappa}) = \lambda(m^2 - n^2) - \varkappa(m^2 - n^2)(m^2 - n^2)$$

$$T = X \quad X = m^2 - n^2 \quad (37)$$

est négative quelles que soient les valeurs de m, n, on a

$$fz = 0,$$

et de même

$$\frac{fz + f(-z)}{2} = 0, \quad \frac{fz - f(-z)}{2z} = 0.$$

Si, au contraire, cette partie réelle est positive, ces trois fonctions sont toujours infinies. Il y a cependant un cas particulier à considérer, savoir, celui où cette partie réelle se réduit à Pm^2 ou Qn^2, P, Q étant des quantités positives. Il faut ici que le coefficient de n ou de m dans la partie réelle de $Im + Jn$ s'évanouisse. Enfin, si les parties réelles s'évanouissent entièrement, ce qui ne peut arriver que pour

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \lambda = 0.$$

fx est fini. On a donc pour fx fonction impaire,

$$\frac{fz + f(-z)}{2} = 0, \quad \frac{fz - f(-z)}{2z} = 0$$

(la seconde équation à cause du dénominateur infini z). Il est cependant certain que, dans plusieurs cas pour lesquels fx est fonction paire, on peut réduire fx en une suite de fractions simples : par exemple, $yx : gx$ est une fonction impaire que l'on peut, par ce qui précède, développer en suite de fractions simples; en écrivant $x + \frac{1}{2}\Upsilon$ au lieu de x, on déduit un pareil développement pour $Gx : Zx$ qui est fonction paire.

Remarquons que quand la partie réelle de

$$a(m, n)^2 - \lambda\varepsilon\Omega^2 m^2 + \lambda\varepsilon\Upsilon^2 n^2$$

est négative pour toute valeur de m ou n, la suite pour fx est toujours convergente. En effet, les numérateurs des fractions simples contiennent ce facteur de fz,

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}a(m,n)^2} q_1^{\frac{1}{2}\lambda m^2} q_2^{\frac{1}{2}\lambda n^2},$$

qui s'évanouit pour les valeurs infiniment grandes de m, n. Dans le

cas où la partie réelle est positive, le développement ne peut jamais être vrai; je crois qu'en général il est vrai, dans les cas limites, quand la suite que l'on obtient est convergente. Il y a des exceptions cependant; on en verra une en développant $\varphi^2 x$.

Avant de passer aux exemples, développons la condition pour que la partie réelle en question soit toujours négative.

En supposant

$$a = h + ki,$$

on obtient pour cette quantité l'expression

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} & m^2\left\{h(\omega^2-\omega'^2)-2k\omega\omega'-\frac{\pi \bmod \omega\omega'-\omega'\omega}{\pi+\pi'}\right\} \\ & +n^2\left\{h(\upsilon^2-\upsilon'^2)-2k\upsilon\upsilon'-\frac{\pi \bmod \omega\omega'-\omega'\omega}{\omega^2+\omega'^2}\right\} \\ & +2mn\left\{h(\omega\upsilon-\omega'\upsilon')-k(\omega\upsilon'+\omega'\upsilon)\right\}. \end{aligned}\right.$$

qui doit toujours rester négative. Cela donne, après quelques réductions, la condition

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} & h^2+k^2+\frac{2(\pi\omega\omega'-\omega'\omega)}{(\omega+\omega')(\pi+\pi' \bmod \omega\omega'-\omega'\omega)}\left[(\omega\upsilon-\omega'\upsilon')h+(\omega\upsilon'+\omega'\upsilon)k\right] \\ & -\frac{\pi}{(\omega+\omega')(\upsilon+\upsilon')}<0 \end{aligned}\right.$$

Les valeurs

$$h=0,\quad k=0$$

satisfont à cette condition, laquelle du reste (en considérant h, k comme les coordonnées d'un point) est satisfaite pour tout point situé en dedans d'un certain cercle qui inclut l'origine, et dont on aurait l'équation en remplaçant le signe $<$ par le signe $=$ dans la formule (38).

On obtient de cette façon une grande variété de formules particulières. Par exemple celles-ci :

$$
(\mathrm{U})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varepsilon^{ax^2+bx} : \mathrm{y}x = \sum \Big| \Big(\cdots \Big) \cdots \varepsilon^{a(m,n)^2+b(m,n)} q^{\cdots m} q^{\cdots n} \{x - (m,n)\}^{\cdots} \Big|, \\
&\varepsilon^{ax^2+bx} : \mathrm{g}x = \cdots b \cdots c \cdots \sum \Big| \Big(\cdots \Big) \cdots \varepsilon^{a(m,n)^2+b(m,n)} q_1^{\cdots m+\cdots} q_2^{\cdots n} \{x - (m,n)\}^{\cdots} \Big|, \\
&\varepsilon^{ax^2+bx} : \mathrm{G}x = ib \cdots c \cdots \sum \Big| \Big(\cdots \Big) \cdots \varepsilon^{a(m,n)^2+b(m,n)} q_1^{\cdots m} q_2^{\cdots n+\cdots} \{x - (m,n)\}^{\cdots} \Big|, \\
&\varepsilon^{ax^2+bx} : \mathrm{Z}x = ic \cdots c \cdots \sum \Big| \Big(\cdots \Big) \cdots \varepsilon^{a(m,n)^2+b(m,n)} q_1^{\cdots m+\cdots} q_2^{\cdots n} \{x - (m,n)\}^{\cdots} \Big|.
\end{aligned}
\right.
$$

dans lesquelles, pour trouver les limites de a, il faut faire $z = 0$ dans la formule (38).

On a ensuite ce système de formules sans exponentielles,

$$
\mathrm{V}\left\{
\begin{array}{l}
gx : \mathrm{V}x = \sum \left[(-1)^{m} \{x - (m, n)\}^{-1} \right], \\[2ex]
Gx : \mathrm{V}x = \sum \left[(-1)^{m} \{x - (m, n)\}^{-1} \right], \\[2ex]
Zx : \mathrm{V}x = \sum \left[(-1)^{m+n} \{x - (m, n)\}^{-1} \right]; \\[2ex]
\mathrm{V}x : gx = -b^{-1} e^{-1} \sum \left[(-1)^{m} \{x - (m, n)\}^{-1} \right], \\[2ex]
Gx : gx = -e^{-1} \sum \left[(-1)^{m+n} \{x - (m, n)\}^{-1} \right], \\[2ex]
Zx : gx = -b^{-1} \sum \left[(-1)^{n} \{x - (m, n)\}^{-1} \right]; \\[2ex]
\mathrm{V}x : Gx = -b^{-1} e^{-1} \sum \left[(-1)^{m} \{x - (m, n)\}^{-1} \right], \\[2ex]
gx : Gx = ie^{-1} \sum \left[(-1)^{m+n} \{x - (m, n)\}^{-1} \right], \\[2ex]
Zx : Gx = ib^{-1} \sum \left[(-1)^{n} \{x - (m, n)\}^{-1} \right]; \\[2ex]
\mathrm{V}x : Zx = ie^{-1} e^{-1} \sum \left[(-1)^{m+n} \{x - (m, n)\}^{-1} \right], \\[2ex]
gx : Zx = e^{-1} \sum \left[(-1)^{m} \{x - (m, n)\}^{-1} \right], \\[2ex]
Gx : Zx = ie^{-1} \sum \left[(-1)^{n} \{x - (m, n)\}^{-1} \right]
\end{array}
\right.
$$

dont quelques-unes ont été données par Abel. Il faut remarquer que celles de ces équations où la fonction est impaire sont justifiées par le théorème de M. Cauchy, et que les autres se déduisent de celles-ci. On peut trouver de même le développement des fonctions

$$
\frac{1}{\mathrm{V}x + gx}, \quad \frac{Gx}{\mathrm{V}x + gx}, \quad \frac{\mathrm{V}x + gx}{Zx + Gx}.
$$

(celles-ci, qui sont toutes impaires, ont été déjà considérées; nous venons de faire voir que le développement est admissible);

$$\frac{1}{\mathrm{y}x\,\mathrm{g}x\,\mathrm{G}x},\ldots,\quad \frac{\mathrm{Z}x}{\mathrm{y}x\,\mathrm{g}x\,\mathrm{G}x},\ldots,\quad \frac{1}{\mathrm{y}x\,\mathrm{g}x\,\mathrm{G}x\,\mathrm{Z}x},\ldots,$$

chacune, excepté celles de la suite $\frac{\mathrm{y}x\,\mathrm{g}x}{\mathrm{G}x\,\mathrm{Z}x}$, multipliée par un exponentiel $\varepsilon^{\frac{1}{2}ax^2+bx}$. Par exemple,

$$\text{W)}\quad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{y}x\,\mathrm{g}x\,\mathrm{G}x\,\mathrm{Z}x} &= \sum\left[\varepsilon^{\frac{1}{2}a(m,n)^2+b(m,n)}\,q_1^{2m^2}\,q^{2n^2}\{x-(m,n)\}^{-1}\right]\\ &-\sum\left[\varepsilon^{\frac{1}{2}a(\bar{m},n)^2+b(\bar{m},n)}\,q_1^{2(m+\frac{1}{2})^2}\,q^{2n^2}\{x-(\bar{m},n)\}^{-1}\right]\\ &-\sum\left[\varepsilon^{\frac{1}{2}a(m,\bar{n})^2+b(m,\bar{n})}\,q_1^{2m^2}\,q^{2(n+\frac{1}{2})^2}\{x-(m,\bar{n})\}^{-1}\right]\\ &-\sum\left[\varepsilon^{\frac{1}{2}a(\bar{m},\bar{n})^2+b(\bar{m},\bar{n})}\,q_1^{2(m+\frac{1}{2})^2}\,q^{2(n+\frac{1}{2})^2}\{x-(\bar{m},\bar{n})\}^{-1}\right].\end{aligned}\right.$$

Mais on est conduit à un résultat beaucoup plus important en considérant, par exemple, le développement de $\wp^2 x$. Cette fonction contient non-seulement une suite de fractions simples, mais aussi un terme constant; nous écrirons

$$(39)\qquad \wp^2 x = \mathrm{J} + \sum\left[\mathrm{L}\{x-(\bar{m},\bar{n})\}^{-2} + \mathrm{M}\{x-(\bar{m},\bar{n})\}^{-1}\right].$$

Pour déterminer L, M de la manière la plus simple, changeons x en $x+\frac{1}{2}(\Omega-\frac{1}{2})$. En faisant attention à la valeur de $\wp x = \mathrm{y}x : \mathrm{Z}x$, on obtient

$$-e^{-2}c^{-2}(\wp x)^2 = \mathrm{J} - \sum\left[\mathrm{L}\{x-(m,n)\}^{-2} + \mathrm{M}\{x-(m,n)\}^{-1}\right];$$

de là

$$\mathrm{L} = -e^{-2}c^{-2}\{x-(m,n)\}^2(\wp x)^{-2},$$

$$\mathrm{M} = -e^{-2}c^{-2}\frac{d}{dx}\left[\{x-(m,n)\}^2(\wp x)^{-2}\right],\quad x=(m,n);$$

ou enfin

$$\mathrm{L} = -e^{-2}c^{-2}x^2(\wp x)^{-2},$$

$$\mathrm{M} = -e^2c^2\frac{d}{dx}\left[x^2(\wp x)^{-2}\right],\quad \text{pour}\quad x=0:$$

ce qui donne

$$40 \qquad \begin{cases} L = -e^{-2}c^{-2}, \quad M = 0, \\ \varphi^2 x = J - e^{-2}c^{-2}\sum\{x - (m, n)\}^{-2}. \end{cases}$$

En intégrant deux fois,

$$41 \qquad \int_0^x dx \int_0^x \varphi^2 x\, dx = \tfrac{1}{2} J x^2 + e^{-2}c^{-2}\sum \log\{x - (m, n)\},$$

ou, à cause de $\log Zx = -\frac{1}{2}Bx^2 - \sum \log\{x - (m, n)\}$,

$$42. \qquad \int_0^x dx \int_0^x \varphi^2 x\, dx = \tfrac{1}{2} I x^2 - e^{-2}c^{-2}\log Zx$$

en mettant, pour abréger,

$$I = J - e^{-2}c^{-2}B$$

(on n'a pas ajouté de constante arbitraire, parce que Zx est fonction paire de x qui se réduit à l'unité pour $x = 0$). Puis, on a

$$43 \qquad Zx = e^{-\frac{1}{2}Ix^2 + e^{-2}c^{-2}\int_0^x dx \int_0^x \varphi^2 x\, dx}$$

De là il est facile de déterminer la valeur de I. Soit, pour un moment,

$$\varphi_1 x = \int_0^x \varphi^2 x\, dx, \quad \varphi_2 x = \int_0^x \varphi_1 x\, dx.$$

Puisque

$$\varphi^2 x + \Omega = \varphi^2 x + 0,$$

on a

$$\varphi_1(x + \Omega) = \varphi_1 x + \varphi_1 \Omega,$$
$$\varphi_2(x + \Omega) - \varphi_2 x = x\varphi_1 \Omega$$

Mais de l'équation

$$\varphi^2 x - \varphi^2(x + \Omega) = 0$$

on déduit

$$\varphi_1 x - \varphi_1(x + \Omega) = \varphi_1 \Omega, \quad \varphi_2 x - \varphi_2(x + \Omega) = x\varphi_1 \Omega$$

ou, en posant $x = \frac{1}{2}\Omega$,

$$\varphi\Omega = 2\varphi\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) - \varphi\Omega - \Omega\varphi\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x+\Omega) - \varphi x = 2\varphi(x+\Omega)\,\varphi\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right).$$

et de là

$$Z(x+\Omega) = e^{-\frac{c\Omega}{2}\left[1 - \frac{2}{\Omega}\varphi\left(\frac{1}{2}\Omega\right)\right]\left(x+\frac{\Omega}{2}\right)}\,Zx.$$

Mais on a déjà

$$Z(x+\Omega) = e^{\frac{c}{2}(x+\Omega)}\,q\,Zx = e^{\frac{c}{2}(x+\Omega)}\,\Omega\,Zx;$$

donc enfin

$$\Omega e^{\frac{c}{2}\Omega} = e^{\frac{c}{2}\Omega}\left[1 - \frac{2}{\Omega}\varphi\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right)\right] = \beta,$$

c'est-à-dire

$$44 \qquad \frac{1}{2}\Omega e^{\frac{c}{2}\Omega} - 1 = \frac{1}{2}\beta - \frac{c\Omega}{2}\varphi\left(\tfrac{1}{2}\Omega\right) = \frac{1}{2}\beta - \frac{c\Omega}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\Omega}\varphi^2 a\,da.$$

Soit, pour abréger,

$$45 \qquad M = \frac{c\Omega}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\Omega}\varphi^2 a\,da,$$

on a cette équation

$$X \qquad Zx = e^{\frac{c}{2}(x+\Omega)}\,\Omega\,e^{M\int_0^x \varphi^2 a\,da}\int_0^x \varphi^2 a\,da,$$

qui exprime la fonction Zx au moyen de φx. C'est, en effet, la formule remarquable de M. Jacobi, que nous avons citée dans l'introduction de ce Mémoire.

En changeant seulement la notation, on a, d'après M. Jacobi,

$$46 \qquad \varphi^2(x-a) - \varphi^2(x+a) = \frac{4\varphi a\,fa\,Fa\,\varphi x\,fx\,Fx}{1 - c^2\varphi^2 a\,\varphi^2 x},$$

$$47 \qquad \int_0^x \{\varphi^2(x-a) - \varphi^2(x+a)\}\,dx = \frac{2\varphi a\,fa\,Fa\,\varphi x}{1 - c^2\varphi^2 a\,\varphi^2 x},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$48 \qquad \int_0^x \varphi^2(x+a)\,dx - \int_0^x \varphi^2(x-a)\,dx - 2\int_0^a \varphi^2 a\,da = \frac{2\varphi a\,fa\,Fa\,\varphi x}{1 - c^2\varphi^2 a\,\varphi^2 x}.$$

De là, en multipliant par $e^2 c^2$, et faisant attention à la valeur de Zx,

$$(49)\qquad \frac{Z(x+a)}{Z(x-a)} - \frac{Z(x-a)}{Z(x-a)} = \frac{2Z'a}{Za} = \frac{2c^2 c^2 \varphi a f a \mathrm{F} a \varphi a}{1 + c^2 c^2 \varphi^2 a \varphi^2 x}.$$

Écrivant dans cette équation a, x au lieu de x, a, et ajoutant, on obtient

$$(50)\qquad \frac{Z'x}{Zx} + \frac{Za}{Za} = \frac{Z'(x+a)}{Z(x+a)} = c^2 c^2 \varphi a \varphi x \varphi(a+x).$$

En intégrant la même équation par rapport à a,

$$(51)\qquad \begin{cases} \log Z(x+a) + \log Z(x-a) = 2\log Zx - 2\log Za \\ \qquad = \log(1 + c^2 c^2 \varphi^2 a \varphi^2 x), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(52)\qquad Z(x+a)\,Z(x-a) = Z^2 x\, Z^2 a\,(1 + c^2 c^2 \varphi^2 a \varphi^2 x),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(53)\qquad Z(x+a)\,Z(x-a) = Z^2 x\, Z^2 a - c^2 c^2 \mathrm{y}^2 x\, \mathrm{y}^2 a,$$

de laquelle on déduit facilement, en écrivant $x + \frac{1}{2}\Omega$, $x + \frac{1}{2}\Upsilon$, $x + \frac{1}{2}\Omega + \frac{1}{2}\Upsilon$ au lieu de x, les équations complémentaires

$$(\mathrm{Y})\qquad \begin{cases} \mathrm{y}(x+a)\,\mathrm{y}(x-a) = \mathrm{y}^2 x\, Z^2 a - \mathrm{y}^2 a\, Z^2 x, \\ \mathrm{g}(x+a)\,\mathrm{g}(x-a) = \mathrm{g}^2 x\, Z^2 a - c^2 \mathrm{g}^2 a\, Z^2 x, \\ \mathrm{G}(x+a)\,\mathrm{G}(x-a) = \mathrm{G}^2 x\, Z^2 a + c^2 \mathrm{G}^2 a\, Z^2 x. \end{cases}$$

Quoiqu'elle ne soit pas liée très-étroite mentavec la théorie actuelle, on peut ajouter ici cette autre formule de M. Jacobi, qu'il obtient en intégrant par rapport à x, au lieu de a,

$$(54)\qquad \Pi(x, a) = \int_0^x \frac{-c^2 c^2 \varphi a f a \mathrm{F} a \varphi^2 x\, dx}{1 + c^2 c^2 \varphi^2 a \varphi^2 x} = \frac{1}{2}\log\frac{Z(x-a)}{Z(x+a)} + x\frac{Za}{Za},$$

au moyen de laquelle il déduit des formules pour l'addition des arguments ou des paramètres des fonctions de troisième espèce. On trouve aussi, dans les *Fund. nova*, quelques formules déduites de l'équation (49) pour exprimer $\frac{Z(x-a)\,Z(y-a)\,Z(x+y+a)}{Z(x+a)\,Z(y+a)\,Z(x+y-a)}$ au moyen de la fonction φ :

il serait facile de déduire des équations semblables pour les autres fonctions y, g, G.

Note sur une intégrale définie.

Soient k_1, k, des quatités réelles dont la première est la plus grande; $\Omega = \omega + \omega' i$, $\Upsilon = \upsilon - \upsilon' i$ des quantités quelconques, telles que $\omega\upsilon' - \omega'\upsilon$ ne s'évanouisse pas, et écrivons

$$(55) \qquad u = \int_k^{k_1} \frac{dx}{\Omega + \Upsilon x}.$$

L'intégrale u a toujours une valeur finie et déterminée, puisque le dénominateur ne devient jamais zéro. On a évidemment

$$(56) \qquad u = \int_0^\infty dx \left[\frac{1}{\Omega + \Upsilon(x + k)} - \frac{1}{\Omega + \Upsilon(x + k_1)} \right],$$

et l'intégrale indéfinie est

$$(57) \qquad u = -\frac{1}{\Upsilon} \log \left\{ \pm \frac{\Omega + \Upsilon(x + k_1)}{\Omega + \Upsilon(x + k)} \right\};$$

il faut passer de là à l'intégrale définie, entre les limites 0, ∞. Soit

$$(58) \qquad \frac{\Omega + \Upsilon(x + k_1)}{\Omega + \Upsilon(x + k)} = A_x + iB_x.$$

Il est facile de voir qu'en faisant abstraction d'un dénominateur toujours positif, A_x est une fonction du second degré en x, et B_x se réduit à la quantité constante $(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)(k_1 - k)$. Le signe de B_x est donc toujours le même que celui de $\omega'\upsilon - \omega\upsilon'$; quant à celui de A_x, puisque évidemment $A_\infty = 1$, il est clair qui si A_0 est positif, A_x reste toujours positif, ou change deux fois de signe quand x passe de 0 à ∞. Si, au contraire, A_0 est négatif, A_x est négatif depuis $x = 0$ jusqu'à une certaine valeur positive de x, $x = \alpha$, et positif depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \infty$. Considérons d'abord ce dernier cas. En représentant par Lx la valeur principale de $\log x$ (cela suppose que la partie réelle de x est positive), on obtient cette valeur de u,

$$u = \frac{1}{\Upsilon} L\left[-\frac{\Omega + \Upsilon k}{\Omega + \Upsilon k_1} \right] - \frac{1}{\Upsilon} L\left[-\frac{\Omega + \Upsilon(\alpha + k_1 - \varepsilon)}{\Omega + \Upsilon(\alpha + k - \varepsilon)} \right] - \frac{1}{\Upsilon} L\left[\frac{\Omega + \Upsilon(\alpha + k_1 + \varepsilon)}{\Omega + \Upsilon(\alpha + k + \varepsilon)} \right].$$

où ε est supposé une quantité infiniment petite positive. La somme des derniers termes se réduit à

$$(59)\qquad \frac{\varepsilon}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{B_\alpha}{A_{\alpha-\varepsilon}} + \operatorname{arc\,tang}\frac{A_{\alpha+\varepsilon}}{B_{\alpha+\varepsilon}}\right),$$

où, comme à l'ordinaire, arc tang x doit être situé entre les limites $\pm\frac{\pi}{2}$.

Dans cette formule, $A_{\alpha-\varepsilon}$ est une quantité infiniment petite et négative; $A_{\alpha+\varepsilon}$ est une quantité infiniment petite et positive; donc, quand B_α est négatif, les arcs se réduisent à $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, et si B_α est positif, à $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$(60)\qquad u = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.\left(-\frac{\omega+\omega'i}{\upsilon+\upsilon'i}\right) \pm \frac{i}{2}\pi i$$

où il faut se servir du signe supérieur ou inférieur selon que $\omega\upsilon' - \omega'\upsilon$ est positif ou négatif. Dans le cas où A_0 est positif, si A_x reste toujours positif, on obtient tout de suite

$$(61)\qquad u = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.\left(-\frac{\omega+\omega'i}{\upsilon+\upsilon'i}\right)$$

Si A_x change deux fois de signe, par exemple pour $x = \alpha$ et $x = \beta$, il faut introduire les corrections

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{B_\alpha}{A_{\alpha-\varepsilon}} + \operatorname{arc\,tang}\frac{B_\alpha}{A_{\alpha+\varepsilon}}\right) + \frac{1}{2}\left(-\operatorname{arc\,tang}\frac{B_\beta}{A_{\beta-\varepsilon}} - \operatorname{arc\,tang}\frac{B_\beta}{A_{\beta+\varepsilon}}\right)$$

qui se détruisent l'une l'autre, en sorte que l'on a le même résultat que si A_x était toujours positif. En se servant de la notation employée dans le Mémoire, on a dans tous les cas

$$(62)\qquad u = \mathrm{L}.\left(-\frac{\omega+\omega'i}{\upsilon+\upsilon'i}\right),$$

où le signe se détermine d'après celui de $\omega\upsilon' - \omega'\upsilon$.

En particulier,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\Omega \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.\left(-\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right),$$

ou

$$63' \qquad \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon \operatorname{tang} z} \frac{dx}{\Omega^2 - \Upsilon^2 x^2} = \frac{1}{2\Omega\Upsilon} \mathrm{L} \pm \pi i \left(\frac{\Omega + \Upsilon \operatorname{tang} z}{\Omega - \Upsilon \operatorname{tang} z} \right).$$

Je ne sais pas si l'on a cherché avant moi la valeur exacte de cette intégrale définie, qui est cependant la plus simple qu'on puisse imaginer, et qui devrait, je crois, trouver place dans les livres élémentaires.

Nota. Une partie de ces recherches a déjà été imprimée dans le *Cambridge mathematical Journal;* je me suis borné au cas où Ω, Υ sont de la forme ω, νi, ce qui simplifie beaucoup la détermination des intégrales définies doubles; mais la forme générale des résultats en est très-peu affectée.

NOTE

SUR LES COURBES ELLIPTIQUES DE LA PREMIÈRE CLASSE;

PAR J.-A. SERRET.

I.

Dans les deux Mémoires que j'ai publiés récemment dans ce Recueil, j'ai démontré l'existence d'une infinité de classes de courbes algébriques, dont les arcs sont identiques aux fonctions elliptiques de première espèce, qui les représentent; chaque classe renferme elle-même une infinité de courbes, et M. Liouville a depuis étendu mes résultats, en montrant qu'on pouvait supposer fractionnaire l'un des paramètres qui entrent dans l'équation générale de ces courbes, et que mon analyse supposait nécessairement entier. Les courbes de la première classe comprennent la lemniscate, et méritent pour cette raison d'être étudiées avec soin; il ne sera donc pas inutile de donner ici quelques développements relatifs seulement aux courbes de cette classe.

II.

On a, comme on sait, pour les courbes de la première classe,

$$(1)\quad \begin{cases} x + iy = Ce^{\omega\left(\frac{z-a}{z-\alpha}\right)^{n}}, \\ x - iy = Ce^{\omega\left(\frac{z+\alpha}{z-a}\right)^{n}}, \end{cases}$$

où i désigne l'imaginaire $\sqrt{-1}$, C et ω des constantes réelles quelconques, n un nombre entier ou fractionnaire, a et α des constantes imaginaires conjuguées, satisfaisant à la condition

$$(2)\qquad \frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha} = \frac{n}{n+1};$$

on aura, en outre, en différentiant les équations (1) et ayant égard à la relation (2),

$$(3)\quad \begin{cases} dx + i\,dy = Ce^{i\omega}\left[-(a-\alpha) - n(a-\alpha)\right]\dfrac{(z-a)(z+\alpha)^n\,dz}{(z-\alpha)^n(z+\alpha)^{n+1}}, \\ dx - i\,dy = Ce^{-\omega i}\left[-(a-\alpha) + n(a-\alpha)\right]\dfrac{(z-\alpha)(z+\alpha)^n\,dz}{(z-a)^n(z+a)^{n+1}}. \end{cases}$$

Cela posé, si r désigne le rayon vecteur $\sqrt{x^2+y^2}$, et ds la différentielle de l'arc $\sqrt{dx^2+dy^2}$, on aura, en vertu des équations (1), (2), (3),

$$(4)\qquad r^2 = C^2\frac{(z+a)(z+\alpha)}{(z-a)(z-\alpha)}.$$

$$(5)\qquad ds = 2C\sqrt{na\alpha}\,\frac{dz}{\sqrt{(z+a)(z-\alpha)(z-a)(z-\alpha)}}.$$

III.

Rien n'est plus facile que d'avoir l'équation en r et s des courbes dont nous nous occupons; si l'on élimine z et dz entre les équations (5), (4), et l'équation qu'on obtient en différentiant (4), on trouve très-aisément, en prenant pour unité le paramètre C,

$$(6)\qquad ds = 2\sqrt{n(n+1)}\,\frac{dr}{\sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}},$$

ce qui donne ce théorème remarquable : *L'arc des courbes de première classe est une fonction elliptique du rayon vecteur.*

Si θ désigne la seconde coordonnée polaire, on aura pour l'équation différentielle de ces courbes,

$$\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2} = 2\sqrt{n(n+1)}\,\frac{dr}{\sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}},$$

ou

$$(7)\qquad d\theta = \frac{r^2-(2n+1)}{\sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}}\,\frac{dr}{r},$$

on tire de là

$$\tfrac{1}{2}r^2\,d\theta = \tfrac{1}{4}\,\frac{r^2-(2n+1)}{\sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}}\,d(r^2).$$

d'où

$$\int \tfrac{1}{2} r^2 d\vartheta = -\tfrac{1}{4}\sqrt{-r^4 + 2(2n+1)r^2 - 1} + \text{constante},$$

ce qui montre que *les courbes de la première classe sont toutes carrables comme la lemniscate.*

L'équation (7) fait connaître $\dfrac{r}{\left(\dfrac{dr}{d\vartheta}\right)}$ en fonction de r; on en déduit aisément, par la différentiation, la valeur du rayon de courbure qui est simplement

$$R = \frac{2r\sqrt{n(n-1)}}{3r^2 - 2(n+1)}.$$

Dans le cas de $n = 1$, qui est précisément le cas de la lemniscate, on a

$$ds = 2\sqrt{2}\,\frac{dr}{\sqrt{-r^4 + 6r^2 - 1}}.$$

r désigne ici le rayon vecteur issu de l'un des foyers: on sait que si r désigne le rayon vecteur mené du centre, on a plus simplement

$$ds = \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}},$$

mais ces deux formes se déduisent aisément l'une de l'autre par les transformations connues.

IV.

On obtiendrait facilement l'équation sous forme finie de nos courbes, en éliminant z entre l'équation (4) et l'une des équations (1); mais il est, je crois, encore plus simple de la déduire de l'équation (7) par l'intégration.

On a

$$d\vartheta = \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^4 + 2(2n+1)r^2 - 1}} = (2n+1)\frac{\dfrac{dr}{r}}{\sqrt{-r^4 + 2(2n+1)r^2 - 1}}$$

où l'on doit avoir soin de prendre partout le radical avec le même

signe; il est clair que pour que le radical soit réel, il faut que r^2 et $\frac{1}{r^2}$ soient compris entre

$$2n+1-2\sqrt{n(n+1)} \quad \text{et} \quad 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}:$$

on pourra donc poser

$$(8)\quad \begin{cases} r^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\cos 2\lambda, \\ \frac{1}{r^2} = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\cos 2\mu, \end{cases}$$

λ et μ désignant deux angles qu'on pourra évidemment ne faire varier que de o à $\frac{\pi}{2}$, et dont, par suite, toutes les lignes trigonométriques seront positives; d'après cela, on trouve

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}} = -d\lambda,$$

$$\frac{\frac{dr}{r}}{\sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}} = d\mu,$$

et l'équation (7) deviendra

$$d\theta = -d\lambda - (2n+1)\,d\mu,$$

d'où, en intégrant et désignant par ω une constante arbitraire,

$$\theta = \omega - \lambda - (2n+1)\mu.$$

On obtiendra donc l'équation des courbes de première classe en éliminant λ et μ entre cette équation et les équations (8). La constante ω est analogue à celle que l'on désignait par la même lettre dans les équations (1); nous la supposerons égale à $\frac{\pi}{2}$, et l'on aura

$$e^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\lambda-\mu\right)}\,e^{-2n\mu i},$$

ou

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = [\sin(\lambda+\mu) + i\cos(\lambda+\mu)]\cos 2n\mu + i\sin 2n\mu.$$

Faisons, pour abréger,

$$\Delta = \sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}.$$

on aura, en vertu des équations (8),

$$\cos 2\mu = \frac{1-(2n+1)r^2}{2r^2\sqrt{n(n+1)}}, \qquad \sin 2\mu = \frac{\Delta}{2r^2\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\cos 2\lambda = \frac{r^2-(2n+1)}{2\sqrt{n(n+1)}}, \qquad \sin 2\lambda = \frac{\Delta}{2\sqrt{n(n+1)}},$$

d'où

$$\cos 2\mu - i\sin 2\mu = \frac{[1-(2n+1)r^2]-i\Delta}{2r^2\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\cos 2\lambda - i\sin 2\lambda = \frac{[r^2-(2n+1)]-i\Delta}{2\sqrt{n(n+1)}}$$

et, par suite,

$$\cos 2(\lambda+\mu) - i\sin 2(\lambda+\mu) = \frac{-(r^4+1)+2(n+1)r^2+i\Delta}{(n+1)r^2}.$$

d'où, en extrayant la racine carrée, et multipliant ensuite par i,

$$\sin(\lambda+\mu) + i\cos(\lambda+\mu) = \frac{(r^2+1)-i\Delta}{2r\sqrt{n+1}}.$$

D'après cela, l'équation (9) devient

$$(10) \qquad \cos\zeta - i\sin\zeta = \frac{(r^2+1)-i\Delta}{2r^n\sqrt{n+1}}\left[1-\frac{2n+1}{n+1}\left(r^2-i\Delta\right)\right]^{\frac{n}{2}},$$

ce qui est l'équation générale de nos courbes en coordonnées polaires; si x et y désignent les coordonnées rectangulaires, on aura

$$x+iy = \frac{(r^2+1)-i\Delta}{2r^n\sqrt{n+1}}\left[1-\frac{2n+1}{n+1}\left(r^2-i\Delta\right)\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Dans le cas de n entier, on en déduit pour x et y des valeurs de la forme

$$x = \frac{F(r^2)}{r^n}, \qquad y = \frac{f(r^2)}{r^n}\Delta.$$

F et f désignant des fonctions entières et rationnelles, la première du degré $n-1$, et la seconde du degré n.

V.

On peut conclure de ce qui précède, un théorème remarquable de calcul intégral; car si l'on pose

$$(11)\qquad x = \frac{F(r^2)}{r^{2n}}, \quad y = \frac{f(r^2)}{r^{2n}}\Delta,$$

et que l'on détermine les polynômes F et f par la condition que

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

les $2n+3$ coefficients de F et f seront entièrement déterminés, ainsi que les fonctions x et y, qui satisferont dès lors à l'équation

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\sqrt{n(n+1)}\frac{dr}{\Delta};$$

en d'autres termes, si F et f sont des fonctions entières, et si r désigne le rayon vecteur de la courbe dont les coordonnées rectangulaires x et y sont données par les équations (11), l'arc de cette courbe sera, par cela même, exprimé par l'intégrale elliptique

$$2\sqrt{n(n+1)}\int\frac{dr}{\sqrt{-r^4 + 2(2n+1)r^2 - 1}}.$$

Si n est fractionnaire et égal à $\frac{p}{q}$, l'équation (10) ne cessera pas d'être algébrique, et l'on aura, en élevant ses deux membres à la puissance q,

$$(12)\qquad \cos q\theta + i\sin q\theta = \frac{\left(r^2 + 1 - i\Delta\left(1 - \frac{2p+q}{q}r^2 - i\Delta\right)\right)^q}{2^{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)^p\left(\frac{p+q}{q}\right)^{\frac{p+q}{2}}r^{2p+q}},$$

avec

$$\Delta = \sqrt{-r^4 + 2\frac{2p+q}{q}r^2 - 1},$$

et l'on en déduira, pour $\cos q\theta$ et $\sin q\theta$, des valeurs de la forme

$$\cos q\theta = \frac{F(r^2)}{r^{2p+q}}, \quad \sin q\theta = \frac{f(r^2)}{r^{2p+q}}\Delta,$$

F et f désignant des fonctions entières, la première du degré $p+q$, et

la deuxième du degré $p+q-1$. Si q est pair, et seulement dans ce cas, la courbe aura deux axes rectangulaires, qui ne sont autres que les axes coordonnés des x et des y, car alors la quantité $r^q \cos q\theta$ est une fonction paire de x et de y, et l'équation de la courbe prend la forme

$$\Psi(x^2, y^2) = 0.$$

Il est presque superflu d'ajouter que cette circonstance ne se présentera jamais dans le cas de n entier.

VI.

On ramène aisément la différentielle de l'arc de nos courbes à la forme elliptique ordinaire, en posant, comme dans les équations (8),

$$r^2 = 2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)}\cos 2\lambda,$$

ou

$$\frac{1}{r^2} = 2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)}\cos 2\mu.$$

Si l'on fait cette substitution dans l'équation (6), on trouve

$$ds = \frac{-2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\lambda}},$$

ou

$$ds = \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \frac{d\mu}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\mu}},$$

en faisant, pour abréger,

$$k' = \frac{2\sqrt[4]{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}};$$

cette forme du module est moins simple que celle qu'on avait trouvée d'abord, et qui était

$$k = \sqrt{\frac{n}{n+1}};$$

mais il est aisé de vérifier que ces deux modules sont liés l'un à l'autre par la relation

$$k' = \frac{2\sqrt{k}}{k+1}.$$

en sorte qu'on peut passer de l'un à l'autre par la transformation connue.

VII.

Si l'on fait $n = 1$ dans l'équation (10), on trouve

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{-(r^4+4r^2-1)+i(r^2-1)\sqrt{-r^4+6r^2-1}}{4r},$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{-(r^4+4r^2-1)}{4r}, \quad \sin\theta = \frac{r^2-1\sqrt{-r^4+6r^2-1}}{4r},$$

équations qui appartiennent toutes deux à la lemniscate. De la première on tire

$$r^2(r^2+4r\cos\theta+4) = 1,$$

ou

$$rr' = 1.$$

Si l'on fait $n = 2$, on a

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{(4r^4-27r^2-12r^2+1)+i(-4r^3+7r^2-1)\sqrt{-r^4+10r^2-1}}{12r^5\sqrt{3}},$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{4r^4+27r^2-12r^2-1}{12r^5\sqrt{3}}, \quad \sin\theta = \frac{-(4r^3+7r^2-1)\sqrt{-r^4+10r^2-1}}{12r^5\sqrt{3}}.$$

L'une quelconque de ces équations représente la seconde courbe de la première classe. De la première on tire

$$r^2 - 3\sqrt{3}\,r\cos\theta + \frac{27}{4} = \frac{3}{r} - \frac{1}{4r^2},$$

ou

$$r'^2 = \frac{3}{r} - \frac{1}{4r^2},$$

ce qui est l'équation de la même courbe entre deux rayons vecteurs r et r'. Cette courbe est facile à construire, elle se compose de trois boucles fermées, comme on le voit dans la figure ci-jointe (voyez *Planche II*); son arc est exprimé par la fonction elliptique de première espèce, au module $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

VIII.

On a vu, au § IV, que si n est entier, l'équation générale de nos courbes est du degré $2(n+1)$, en sorte que, dans ce cas, la courbe particulière dont nous venons de parler est bien réellement la plus simple après la lemniscate; mais si l'on donne à n une valeur fractionnaire $\frac{p}{q}$, le degré de l'équation générale sera $2(p+q)$, et ce nombre se réduira à 6 pour $p=1$ et $q=2$: on aura ainsi une seconde courbe du sixième degré, tout aussi simple que la première. Dans cette hypothèse, l'équation (12) donne

$$\cos 2\theta - i\sin 2\theta = \frac{-r^2+6r-1-(r^2+3r-1)\sqrt{-r^2-4r-1}}{3r\sqrt{3}}.$$

d'où

$$\cos 2\theta = -\frac{r^2+6r-1}{3r\sqrt{3}}, \quad \sin 2\theta = \frac{(r^2+3r-1)\sqrt{-r^2-4r-1}}{3r\sqrt{3}}.$$

Dans la première classe, la lemniscate est la seule courbe du quatrième degré, son arc est exprimé par la fonction elliptique au module $\sqrt{\frac{1}{2}}$, laquelle coïncide avec sa fonction complémentaire. Après la lemniscate, viennent les deux courbes du sixième degré dont nous avons donné les équations; les arcs de ces deux courbes sont exprimés par les deux fonctions elliptiques complémentaires, aux modules $\sqrt{\frac{1}{3}}$ et $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Ce fait est général: si dans l'équation (10), on fait successivement

$$n = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad n = \frac{q}{p},$$

on aura deux courbes du degré $2(p+q)$, dont les arcs seront représentés par les fonctions elliptiques complémentaires aux modules

$$\sqrt{\frac{p}{p+q}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{q}{p+q}}.$$

On voit, par ce qui précède, combien est élégante l'extension que M. Liouville a donnée aux résultats que nous avions découverts.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE
DES CENTRES MULTIPLES,

PAR M. PHILIPPE BRETON,
Ingénieur des Ponts et Chaussées

(Extrait par l'auteur.)

On sait depuis longtemps que, si un lieu géométrique a deux centres situés sur une ligne droite, il y en a un nombre infini situé sur cette droite à des distances égales.

Un lieu géométrique à plusieurs centres peut en avoir de plusieurs espèces. Si, par exemple, on pratique une entaille cylindrique dans un cylindre droit, et si l'on fait rouler indéfiniment le cylindre sur un plan, l'arête de l'entaille se développe une fois à chaque tour, et la courbe plane, ainsi engendrée, embrasse une série indéfinie de contours fermés : le système entier a des centres équidistants, alternativement intérieurs et extérieurs.

Je nomme *espèce de centres* la collection de tous les centres d'un lieu géométrique autour desquels le lieu géométrique est disposé de la même manière. Si A et A′ sont deux centres de même espèce ou *homogènes*, tout rayon mené de A à un point du lieu géométrique est égal et parallèle à un rayon mené de A′ à un autre point du même lieu géométrique. Si A et B sont deux centres tels qu'en menant par A un rayon, et par B une droite égale et parallèle à ce rayon, l'extrémité de cette droite puisse ne pas être dans le lieu géométrique, les centres A et B sont *hétérogènes*.

Soient A et B deux centres quelconques d'un lieu géométrique; si l'on prolonge AB d'une longueur $BA' = AB$, non-seulement A′ est un nouveau centre, mais il est homogène avec A.

Réciproquement, si A et A′ sont deux centres homogènes, le milieu B de leur distance est encore un centre.

Mais si A et B sont deux centres hétérogènes, le milieu de leur distance ne peut être un centre.

Si l'on continue indéfiniment la bissection de la distance de deux centres homogènes, on arrivera à trouver un centre d'une espèce différente de celle des deux premiers, à moins que tous les points de la droite ne soient des centres, et qu'elle ne soit un *axe central*.

Trois centres en ligne droite étant connus, si l'on applique à leur distance le procédé du plus grand commun diviseur, tous les points de division sont des centres. Si donc les distances des trois centres sont incommensurables, tous les points de la ligne droite sont des centres d'une seule espèce, et cette droite est un axe central.

Un lieu géométrique à centres multiples ne peut avoir sur une même droite qu'*une* ou *deux* espèces de centres, savoir, une seule si tous les points de la droite sont des centres, et deux si les centres sont séparés par des intervalles finis. Dans ce cas, les deux espèces alternent ensemble à des distances égales. Je nomme une telle série de centres de deux espèces *alignement de centres*.

Si A, B, C sont trois centres d'espèces quelconques non situés en ligne droite, en achevant le parallélogramme ABCD, le quatrième sommet D sera encore un centre.

En divisant tout le plan en une infinité de parallélogrammes égaux à ABCD par deux systèmes de droites parallèles équidistantes, tous les sommets d'angle sont des centres.

Si les quatre sommets d'un parallélogramme sont des centres homogènes, les milieux des côtés et le centre du parallélogramme sont des centres du lieu géométrique. Les milieux des côtés opposés du parallélogramme sont homogènes entre eux. Ceux des côtés adjacents ne peuvent être homogènes, à moins que le centre du parallélogramme ne soit homogène avec les angles.

Si l'on a quatre centres en parallélogramme, dont deux homogènes entre eux, les deux autres seront aussi homogènes entre eux.

Si l'on a des centres de trois espèces différentes à trois des angles d'un parallélogramme, le quatrième angle sera un centre d'une quatrième espèce.

Lorsqu'on a dans un plan des centres de quatre espèces, on ne peut trouver dans le même plan une cinquième espèce de centres.

Si un lieu géométrique a quatre centres non situés dans un plan, en achevant le parallélipipède dont ces centres sont quatre sommets, les quatre nouveaux sommets sont des centres. Et si les quatre premiers sont de quatre espèces différentes, les quatre autres ne sont homogènes ni entre eux ni avec un des quatre premiers. Les espèces sont alors au nombre de huit.

En divisant tout l'espace par trois systèmes de plans parallèles équidistants, en parallélipipèdes égaux à celui aux sommets duquel on a trouvé huit espèces de centres, on aura des centres à tous les sommets. Il ne peut y avoir un centre d'une neuvième espèce.

Si un lieu géométrique a un axe central et un centre hors de cet axe, on a, dans le plan qui contient ce centre et l'axe, des axes centraux parallèles et de deux espèces différentes, excepté dans le cas où tous les points du plan sont des centres; dans ce cas, je nomme ce plan un *plan central.*

Lorsqu'on a des axes centraux parallèles, tous ceux qui sont situés dans un même plan sont équidistants, et il ne peut y avoir de centre situé hors des axes centraux.

On peut avoir dans l'espace des axes centraux de quatre espèces : ils sont nécessairement parallèles, et disposés comme les quatre espèces de centres qui peuvent exister dans un plan, c'est-à-dire en parallélogrammes égaux.

Si un lieu géométrique a un plan central et un centre hors de ce plan, en menant par ce centre un plan parallèle au plan central, on a un nouveau plan central, et l'on arrive à un système de plans centraux parallèles, équidistants, et de deux espèces.

Les nombres des espèces de centres, d'axes centraux ou de plans centraux sont toujours des puissances de 2. Cette remarque, jointe à la régularité de la distribution des deux, quatre ou huit espèces de centres, donne lieu de présumer qu'il est possible de déduire toutes les propriétés des centres multiples d'un seul et même théorème analytique. Mais l'énoncé même de ce théorème paraît difficile à déterminer.

Comme exemple de surface à huit espèces de centres, on peut étu-

dier celle qui est représentée par l'équation

$$m \cos x + n \cos y + \cos z = a.$$

dans laquelle x, y, z sont trois coordonnées rectangulaires, et m et n deux coefficients numériques. En rapportant cette surface à ses huit espèces de centres prises successivement pour origine des coordonnées, son équation prend une des huit formes

$$\pm m \cos x \pm n \cos y \pm \cos z = a.$$

En faisant dans cette équation

$$a = m + n + 1;$$

elle représente des points isolés, situés aux sommets d'un système de cubes dont les côtés égaux à 2π sont parallèles aux coordonnées. En faisant décroître a, il se forme autour de chacun de ces points des cellules fermées, qui s'allongent dans le sens des z si l'on suppose $m > n > 1$; a continuant à décroître, les cellules se joignent en pointes; puis les pointes sont remplacées par des étranglements, et la surface se compose d'une infinité de tubes alternativement renflés et étranglés; a décroissant encore, les renflements des tubes s'agrandissent et se joignent en pointes dans le sens des y, et les tubes sont remplacés par des nappes ondulées illimitées dans le sens des x et des y : par un nouveau décroissement de a, les sommets des ondes se rapprochent et se joignent en pointes dans le sens des x, puis il se forme des ouvertures à la place de ces pointes, et dès lors toutes les parties de la surface communiquent entre elles. Quand on fait $a = 0$, les huit espèces de centres se confondent deux à deux, mais alors on a quatre espèces de centres superficiels, et la surface rapportée à ces quatre nouvelles espèces de centres prend une des formes

$$m \sin x \pm n \sin y \pm n \sin z = 0,$$

qui, avec celles-ci,

$$m \cos x \pm n \cos y \pm \cos z = 0,$$

complètent les huit espèces de centres.

En faisant

$$m = n = 1 \quad \text{et} \quad a = 0,$$

on a la surface qui peut être représentée par une des huit formes

$$\sin x \pm \sin y \pm \sin z = 0,$$
$$\cos x \pm \cos y \pm \cos z = 0.$$

Si l'on coupe cette surface par un plan parallèle aux plans coordonnés et passant par un des centres superficiels, on obtient un système de carrés égaux dont les côtés font avec les axes des angles de $\frac{1}{4}\pi$ et de $\frac{3}{4}\pi$. Les plans tangents à la surface en un centre superficiel la coupent suivant un système de triangles équilatéraux égaux dont les sommets sont tous des centres superficiels de la surface.

Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de la géométrie élémentaire: Trouver la relation entre la distance des centres et les rayons de deux cercles dont l'un est circonscrit à un polygone irrégulier et dont l'autre est inscrit à ce même polygone:

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

Extrait et traduit de l'allemand par M. Terquem.*

Dans les trois premiers paragraphes, M. Jacobi vérifie les relations trouvées par M. Steiner pour le triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone et octogone, en les comparant aux relations, pour les mêmes polygones, données depuis longtemps par Nicolas Fuss, qui croyait que ses solutions n'étaient pas générales, parce qu'il les avait obtenues en plaçant les polygones de telle sorte que le diamètre commun aux deux cercles passât par le sommet d'un polygone inscrit. Mais cette position particulière n'ôte rien à la généralité des formules; car, d'après un théorème de M. Poncelet, lorsque le problème est possible pour une position d'un sommet, il l'est encore pour une position quelconque. Cette observation est de M. Jacobi. Nous passons à l'objet principal du Mémoire.

§ IV.

Nous allons maintenant établir les formules fondamentales sur lesquelles reposent les considérations suivantes. A cet effet, soient donnés deux cercles dont l'un, de rayon R et de centre C, enveloppe l'autre, de rayon r et de centre c. Désignons par a la distance Cc des deux centres. Par un point quelconque A pris sur le cercle C, on mène une tangente au cercle c, et qui coupe de nouveau le premier cercle en A'; on mène, de la même manière, au cercle c les tangentes A'A'', A''A''', A'''A^{IV}, etc., A, A', A'', A''' A^{IV}, etc., sont sur le cercle C, et AA'A''A'''... est la portion d'un polygone, ou un polygone non fermé, inscrit au cercle C et circonscrit au cercle c. On tire le diamètre com-

* Ce Mémoire est extrait du Journal de M. Crelle, tome III, page 376, année 1828.

mun Cc, qui coupe le cercle C en P, de sorte que

$$CP = R, \quad cP = R + a.$$

Maintenant, faisons les angles

$$ACP = 2\varphi, \quad A'CP = 2\varphi', \quad A''CP = 2\varphi'', \quad A'''CP = 2\varphi''', \quad \text{etc.};$$

on voit facilement que les relations suivantes existent entre deux angles consécutifs,

$$\begin{aligned}
&R\cos(\varphi' - \varphi) + a\cos(\varphi' + \varphi) = r,\\
&R\cos(\varphi'' - \varphi') + a\cos(\varphi'' + \varphi') = r,\\
&R\cos(\varphi''' - \varphi'') + a\cos(\varphi''' + \varphi'') = r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

équations auxquelles on peut donner cette forme

$$\begin{aligned}
&(R + a)\cos\varphi'\cos\varphi + (R - a)\sin\varphi'\sin\varphi = r,\\
&(R + a)\cos\varphi''\cos\varphi' + (R - a)\sin\varphi''\sin\varphi' = r,\\
&(R + a)\cos\varphi'''\cos\varphi'' + (R - a)\sin\varphi'''\sin\varphi'' = r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En soustrayant chacune de ces équations de la suivante, et en remarquant qu'on a

$$\frac{\cos x - \cos y}{\sin y - \sin x} = \operatorname{tang}\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi'' + \varphi}{2}\right) = \frac{R - a}{R + a}\operatorname{tang}\varphi',\\
&\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi''' + \varphi'}{2}\right) = \frac{R - a}{R + a}\operatorname{tang}\varphi',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Sous cette forme, il saute aux yeux que ces équations coïncident avec celle qu'on donne pour la multiplication des transcendantes elliptiques.

En effet, soit l'intégrale elliptique

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} = u,$$

où $\varkappa$ représente une constante quelconque; en posant, d'après une notation qui m'est particulière,

$$\varphi = am(u),$$

et de même

$$\alpha = am(t),$$

α désignant un angle quelconque, enfin

$$\varphi' = am(u + t),$$
$$\varphi'' = am(u + 2t),$$

on sait, d'après le théorème fondamental des fonctions elliptiques, qu'on a

$$\operatorname{tang}\frac{(\varphi' + \varphi'')}{2} = \Delta am(t) \operatorname{tang}\varphi',$$

où

$$\Delta am(t) = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 am(t)}.$$

Si, dans le cas actuel, on détermine les grandeurs $\varkappa$ et t ou α par les deux équations

$$\frac{R - a}{R + a} = \Delta am(t) = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\alpha}, \qquad \varphi' = am(u + t),$$

on aura

$$\varphi = am(u),$$
$$\varphi' = am(u + t),$$
$$\varphi'' = am(u + 2t),$$
$$\varphi''' = am(u + 3t),$$
$$\varphi^{\text{IV}} = am(u + 4t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et $2\varphi'$, $2\varphi''$, $2\varphi'''$, φ^{IV} sont donnés par les constructions indiquées au commencement de ce paragraphe.

§ V.

Déterminons maintenant α et $\varkappa$, ce qu'on effectue au moyen des équations

$$\varphi = am(u), \qquad \alpha = am(t), \qquad \varphi' = am(u + t), \qquad \Delta am(t) = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\alpha} = \frac{R - a}{R + a}.$$

Les éléments de la théorie des fonctions elliptiques donnent

$$\cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi' \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\alpha} = \cos\alpha,$$

et nos formules de ci-dessus

$$\cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi' \frac{R - a}{R + a} = \frac{r}{R + a},$$

ce qui fournit, pour la détermination de α et de $\varkappa$, les deux équations

$$\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\alpha} = \frac{R - a}{R + a}, \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha = \frac{r}{R + a},$$

d'où il suit

$$\varkappa^2 = \frac{4Ra}{(R+a)^2 - r^2}, \qquad 1 - \varkappa'^2 = \frac{(R-a)^2 - r^2}{(R+a)^2 - r^2}.$$

Ensuite on a

$$R + a = \frac{r}{\cos\alpha}, \qquad 2R = \frac{r(1+\Delta)}{\cos\alpha}, \qquad r = \frac{2R\cos\alpha}{1+\Delta},$$

$$R - a = \frac{r\Delta}{\cos\alpha}, \qquad 2a = \frac{r(1-\Delta)}{\cos\alpha}, \qquad a = \frac{R(1-\Delta)}{1+\Delta};$$

pour abréger, on a mis Δ au lieu de $\Delta am(t)$.

Ces formules donnent un moyen facile, lorsqu'on a

$$am(u) = \varphi, \qquad am(t) = \alpha,$$

de trouver $am(u+nt)$; ce qui est le problème de la multiplication des fonctions elliptiques, et cela par une construction de la géométrie élémentaire. D'un point c avec un rayon quelconque r, on décrit un cercle; et du centre C, éloigné de c de la distance $Cc = a$, on décrit un second cercle de rayon R, où a et R sont déterminés par les équations

$$a = \frac{r(1-\Delta)}{1+\Delta}, \qquad R = \frac{r(1+\Delta)}{2\cos\alpha}.$$

Si l'on prend le point A sur la circonférence du cercle C de telle sorte que l'on ait

$$ACP = 2\varphi \quad (\S\ IV),$$

et que l'on détermine les points A′, A″, A‴,..., $A^{(n)}$ par les constructions indiquées au commencement du précédent paragraphe, on aura

$$\frac{A^{(n)}CP}{2} = \varphi^{(n)} = am(u+nt).$$

Si l'on veut seulement déterminer $am(nt)$, alors le point A coïncide avec le point P.

D'ailleurs, il faut remarquer que les angles 2φ, $2\varphi'$, $2\varphi''$, $2\varphi'''$,... doivent toujours être pris en croissant, de manière qu'ils puissent dépasser 360 degrés.

Cette construction semble n'être pas sans quelque avantage sur celle de Lagrange, au moyen du triangle sphérique.

§ VI.

C'est une circonstance bien remarquable que les grandeurs $\varkappa$ et α sont entièrement indépendantes de φ et de u; ainsi, quelque part qu'on prenne le point A sur la circonférence du cercle C, et si

$$\frac{ACP}{2} = \varphi = am(u), \qquad \frac{A'CP}{2} = \varphi' = am(u+t),$$

la droite AA′ *touchera toujours le cercle dont la position et la grandeur sont fixées par les équations*

$$a = R\left(\frac{1-\Delta}{1+\Delta}\right), \qquad r = \frac{2R\cos\alpha}{1-\Delta}.$$

Car il faut se représenter CP comme une droite fixe, à partir de laquelle on compte l'angle 2φ, et dans laquelle est situé le centre du cercle c. De même, quelque part qu'on ait pris A, la droite AA″ touchera un cercle dont la position et la grandeur sont fixées par les équations

$$a = R\left(\frac{1-\Delta''}{1-\Delta''}\right), \qquad r = \frac{2R\cos\alpha}{1-\Delta},$$

si l'on pose

$$\alpha'' = am(2t), \qquad \Delta'' = \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\alpha''},$$

et, en général, quelle que soit la position de A, la droite $AA^{(n)}$ qui ferme le polygone, touchera un cercle dont les éléments sont donnés par les équations

$$a = R\left(\frac{1-\Delta^{(n)}}{1-\Delta^{(n)}}\right), \qquad r = \frac{2R\cos\alpha^{(n)}}{1-\Delta^{(n)}},$$

où

$$\alpha^{(n)} = am(nt), \qquad \Delta^{(n)} = \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\alpha^{(n)}}.$$

Les centres de tous ces cercles sont sur la droite CP.

Nous allons maintenant démontrer que tous ces cercles forment un système qui a la même droite pour *lieu des tangentes égales*, dénomination convenable que M. Steiner a introduite dans ses travaux géométriques. Pour deux cercles, c'est une droite perpendiculaire à la ligne des centres, et qui jouit de la propriété indiquée par son nom; si par un quelconque de ses points, on mène des tangentes aux deux cercles, ces tangentes sont égales. Comme nous savons déjà que tous ces cercles ont leurs centres sur la même droite, il nous faudra seulement faire voir qu'il existe sur cette droite un point tel que les tangentes menées aux cercles par ce point sont égales; car cette propriété appartiendra à tous les points de la droite, élevée par le point ainsi fixé, perpendiculairement à la droite des centres.

Cherchons donc le point de la droite AP qui jouit de cette propriété, relativement aux deux cercles C et c. Soit D la distance du point cherché à C; sa distance à c sera $D - a$; la tangente au premier cercle est égale à $\sqrt{D^2 - R^2}$ et au second cercle $= \sqrt{(D-a)^2 - r^2}$; donc

$$D^2 - R^2 = (D-a)^2 - r^2,$$

d'où

$$D = \frac{R^2 + a^2 - r^2}{2a} = \frac{(R-a)^2 - r^2}{2a} - R;$$

nous avons trouvé ci-dessus

$$z^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2 - r^2},$$

d'où

$$\frac{(R+a)^2 - r^2}{2a} = \frac{2R}{z^2},$$

et ainsi

$$D = \frac{2R}{z^2} - R.$$

Nous voyons que z ne paraît pas dans l'expression de D qui dépend seulement de z; mais, pour tous ces cercles, z reste le même, et ils ne diffèrent que par α. Si nous avions donc cherché le lieu des tangentes égales pour C et un autre cercle, nous aurions trouvé la même expression pour D; ainsi, tous ces cercles ont en commun le même lieu des tangentes égales.

La détermination analytique des éléments du cercle, que la droite $AA^{(n)}$ touche constamment pendant que le point A se meut sur la circonférence du cercle C, serait même, pour de petites valeurs de n, d'une difficulté insurmontable; et, de cette manière, cette détermination est ramenée à une théorie connue, et le problème est résolu dans sa plus grande généralité.

La proposition spéciale que AA'' touche dans son mouvement constamment un cercle, peut s'énoncer ainsi :

Si l'on inscrit dans un cercle un angle en même temps circonscrit à un autre cercle, et si l'on fait mouvoir cet angle de telle sorte que son sommet parcoure la circonférence du premier cercle pendant que ses côtés touchent l'autre cercle, la corde du segment qu'il forme dans le premier cercle touche un troisième cercle ayant le lieu des tangentes égales commun avec les cercles donnés.

M. Poncelet énonce cette proposition dans son *Traité des propriétés projectives* (page 326).

Au moyen de la méthode des projections *perspectives*, on peut étendre cette proposition et l'appliquer au système de deux coniques.

§ VII.

M. Poncelet donne à sa proposition encore une bien plus grande extension. Nous avons supposé que les côtés du polygone touchent un seul et même cercle, ou, en projection, une seule et même conique. Mais M. Poncelet prescrit seulement que ces côtes touchent, suivant un certain ordre, des sections coniques données, tellement qu'une conique peut toucher plusieurs côtés, et alors plusieurs coniques sont censées se réunir en une seule. Ces coniques sont seulement assujetties à la condition qu'elles doivent avoir

avec la conique dans laquelle le polygone est inscrit, les mêmes sécantes réelles ou idéales [*]. Ainsi :

Théorème. — Ayant inscrit à une section conique un polygone dont les côtés, » l'exception d'un seul, touchent d'autres coniques, ayant mêmes sécantes communes » entre elles et avec la première, il arrivera qu'en faisant varier le polygone d'après » ces conditions, le côté libre et toutes les diagonales rouleront également sur d'autres » coniques ayant mêmes sécantes communes avec les proposées. »

Or, cette généralisation se déduit facilement de nos considérations sur les cercles, d'où l'on peut, par les projections, les appliquer à des coniques quelconques. Nous obtenons même de suite les éléments du cercle cherché dans toute sa généralité.

Désignons, comme ci-dessus, les cercles dans leur ordre de succession et d'après leurs centres c, c', c'', c''',..., $c^{(n-1)}$, et leurs rayons par r, r', r'', r''',..., $r^{(n-1)}$; et les distances de leurs centres à C, $cC = a$, $c'C = a'$, $c''C = a''$, ..., $c^{(n-1)}C = a^{(n-1)}$. Ensuite, déterminons les angles

$$z, \quad z', \quad z'', \quad z''', \ldots, \quad z^{(n-1)},$$

$$\cos z = \frac{r}{R + a}, \quad \cos z' = \frac{r'}{R + a'}, \quad \cos z'' = \frac{r''}{R + a''}, \quad \cos z''' = \frac{r'''}{R + a'''}, \ldots, \quad \cos z^{(n-1)} = \frac{r^{(n-1)}}{R + a^{(n-1)}},$$

et posons

$$z = am\,t, \quad z' = am\,t', \quad z'' = am\,t'', \quad z''' = am\,t''', \ldots, \quad z^{(n-1)} = am\,t^{(n-1)}.$$

Maintenant, d'un point quelconque A pris sur le cercle C, menons la tangente AA′ au cercle c, la tangente A′A″ au cercle c', la tangente A″A‴ au cercle c'', et ainsi de suite; et finalement la tangente $A^{(n-1)}A^{(n)}$ au cercle $c^{(n-1)}$; tous les points A, A′, A″, .., $A^{(n)}$, sont sur la circonférence du cercle C; nommons derechef

$$ACP = 2\varphi, \quad A'CP = 2\varphi', \quad A''CP = 2\varphi'', \ldots, \quad A^{(n)}CP = 2\varphi^{(n)},$$

on aura, si $\varphi = am\,u$,

$$\varphi' = am\,u - t, \quad \varphi'' = am\,u - t - t', \quad \varphi''' = am\,u - t - t' - t'', \ldots, \quad \varphi^{(n)} = am\,u - t - t' - t'' - \ldots - t^{(n-1)}.$$

---

[*] M. Poncelet détermine la seconde commune de deux cercles par l'un des points de leurs intersections qui servent aussi à la définition la plus générale de ces sécantes. Soient AB, A′B′ deux demi-diamètres, respectivement [illegible] à la [illegible] leur diamètre [illegible] il est nécessaire [illegible] O, [illegible] :

$$AB = a, \quad A'B' = a',$$

et qu'on désigne par b et b' leurs conjugués respectifs, il faut qu'on ait, 2°

$$\frac{a}{b} = \frac{OA \cdot OB}{OA' \cdot OB'}.$$

Ces conditions [illegible] évidemment lorsque la [illegible] sont encore satisfaites lorsque cette sécante est extérieure aux deux coniques, et, dans ce cas, M. Poncelet la désigne sous le nom de *sécante idéale*. Pour deux cercles qui ne se coupent pas, cette sécante idéale est le lieu des tangentes égales de M. Steiner.

Si l'on fait

$$t + t' + t'' + \ldots + t^{(n-1)} = S,$$

alors, d'après le § VI, la droite $A^{(n)}A$, qui ferme le polygone, roulera sur un cercle dont les éléments sont déterminés par les équations

$$r_m = \frac{2R\cos am S}{1 + \Delta am S}, \quad a_m = \frac{R(1 - \Delta am S)}{1 + \Delta am S},$$

où r_m désigne le rayon et a_m la distance de son centre, situé sur la droite AP, au point C. La condition que tous les cercles ont en commun un même lieu de tangentes égales coïncide avec l'identité du module.

Ce qui précède donne une construction pour l'addition de plusieurs fonctions elliptiques, analogue à la construction que nous avons trouvée ci-dessus pour la multiplication. D'ailleurs, il résulte encore de nos formules que, dans quelque ordre que les côtés AA', $A'A''$, $A''A'''$, etc., touchent les cercles, le point final $A^{(n)}$ reste le même.

§ VIII.

Si l'on détermine maintenant K par l'équation

$$am K = \frac{1}{2}\pi,$$

on sait qu'on a

$$am(u + 2K) = am(u) + \pi,$$

et généralement, i étant un nombre entier,

$$am(u + 2iK) = i\pi + am u.$$

Ceci posé, si $AA'A''\ldots A^{(n)}A$ renferme i fois la circonférence, nous aurions dû, pour plus d'exactitude, écrire

$$S = 2iK - (t + t' + t'' + \ldots t^{(n-1)});$$

mais cela ne change rien aux expressions de a_n et de r_n. Si tous les cercles c, c', c'',..., $c^{(n-1)}$, $c^{(n)}$ se réduisent au seul cercle c, alors le polygone se ferme et est inscrit au cercle C et circonscrit au cercle c; pour ce cas

$$S = t = t' = t'' = \ldots = t^{(n-1)};$$

donc

$$(n+1)t = 2iK \quad \text{et} \quad t = \frac{2iK}{n+1};$$

c'est l'expression analytique de la relation qui doit avoir lieu entre les grandeurs et la position de deux cercles, pour qu'on puisse inscrire à l'un un polygone de $n+1$ côtés, qui soit circonscrit à l'autre, et qui mesure i fois toute la circonférence. Pour

ceux qui n'ont pas l'habitude de nos notations, nous allons transcrire ce théorème de cette manière :

Théorème. « r et R étant les rayons de deux cercles, dont l'un est circonscrit à un » polygone de n sommets et dont l'autre y est inscrit, soit a la distance de leurs centres; » si l'on détermine z et α par les équations

$$\cos\alpha = \frac{r}{R+r}; \quad z = \frac{\sqrt{aR}}{R+a-r}.$$

» on a toujours

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2\sin^2\varphi}} = \frac{i}{m}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2\sin^2\varphi}}.$$

» où i désigne le nombre de fois que le polygone parcourt la circonférence. Cette équa- » tion donne en même temps l'équation de condition qui doit exister entre R, r et a. »

L'équation de condition

$$t = \frac{2iK}{n}$$

étant entièrement indépendante de u, il s'ensuit que le choix du point initial A, ainsi que M. Poncelet le dit, n'est d'aucune influence. Du reste, on peut toujours admettre que i et m n'ont pas de facteur commun, sans cela le polygone revient sur lui-même.

Ainsi, le problème énoncé en tête de ce Mémoire est complétement résolu dans toute sa généralité.

§ IX.

Soit $m = 2p$; ainsi le polygone est d'un nombre pair de côtés; alors A et $A^{(p)}$, A et $A^{(-p)}$, A' et $A'^{(p)}$, ..., $A^{(p-1)}$ et $A^{(-p-1)}$ sont des sommets opposés; et AA', $A'A^{(p+1)}$, $A''A^{(p+2)}$, etc., sont des diagonales qui réunissent ces sommets; ces diagonales, d'après ce qui précède, toucheront donc un cercle, dont les éléments sont déterminés par les équations

$$a = \frac{R(1-\Delta am\,pt)}{1+\Delta am\,pt}, \quad r = \frac{2R\cos am(pt)}{1+\Delta am\,pt}.$$

Mais comme on a

$$t = \frac{2iK}{p},$$

où i est un nombre impair, il vient

$$pt = iK \quad \text{et} \quad am(pt) = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$r = 0, \quad a = R\,\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{1+\sqrt{1-z^2}}.$$

Ainsi le cercle se réduit à un point dans lequel se coupent toutes les diagonales et qui

reste fixe pour le nombre infini de polygones qu'on peut construire, sous ces conditions, pour diverses positions du point initial A ; car la détermination de ce point, renfermée dans l'équation

$$a = R\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1+z}},$$

est entièrement indépendante de u ou de z. Ce point est un des deux qui servent en quelque sorte de limite à la série des cercles qui ont le même lieu de tangentes égales, et par lesquels passent tous les cercles qui ont leurs centres sur la droite des tangentes égales, et coupent orthogonalement la série des cercles. (*Voir* le Mémoire de M. Steiner, Journal de M. Crelle, tome Ier, page 161.)

M. Poncelet a étendu ce théorème au système de deux coniques (*Propriétés projectives*, page 364). Il ne serait peut-être pas sans intérêt pour la théorie des fonctions elliptiques, d'établir des considérations analogues immédiatement sur le système de deux coniques. L'intégrale pourrait se présenter sous une forme compliquée, qui devra pourtant se ramener à la forme plus simple trouvée ci-dessus. Je pourrai revenir sur ce sujet dans une autre occasion.

REMARQUES

SUR LES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES ET ABÉLIENNES;

PAR M. G. EISENSTEIN,

Étudiant à Berlin.

Extrait du Journal de M. Crelle, tome XXVII. — Traduit par M. Liouville.

§ Ier.

Le produit infini

$$1 \qquad \Pi\left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) = \begin{cases} P(0, x) \\ P(1, x) \end{cases},$$

qui représente deux expressions suivant qu'on attribue à l'indice λ toutes les valeurs paires ou toutes les valeurs impaires, et dans lequel nous supposons que le facteur $1 + \frac{x}{0}$ soit remplacé par x, donne, pour chaque valeur réelle ou imaginaire de x, une valeur toute déterminée de la forme $p + q\sqrt{-1}$, qui peut facilement être représentée par des fonctions exponentielles, ou bien, ce qui est au fond la même chose, par des fonctions circulaires; et réciproquement, les deux produits infinis dont il est ici question, donnent une définition complète des fonctions simplement périodiques.

Les transcendantes elliptiques, cette remarquable espèce de fonctions, qui ont tant occupé les géomètres dans ces derniers temps, ne sont pas autre chose que des combinaisons, par voie de *division*, des quatre doubles produits infinis qui se déduisent du produit

$$2 \qquad \Pi\left(1 + \frac{x}{\lambda + \lambda'\sqrt{A}}\right),$$

quand on suppose que A désigne une constante donnée, et que l'on étend le signe de la multiplication Π à toutes les valeurs paires ou impaires de λ ainsi qu'à toutes les valeurs paires ou impaires de λ'. Pour considérer ces quatre produits, désignons-les par les expressions

$$3. \qquad P(0, 0, x), \quad P(1, 0, x), \quad P(0, 1, x), \quad P(1, 1, x),$$

dans chacune desquelles o doit répondre à un nombre pair, et 1 à un nombre impair; alors les trois fonctions elliptiques qui se présentent ordinairement sont données par les

trois quotients suivants :

$$4 \qquad \frac{P(0,0,x)}{P(0,1,x)}, \quad \frac{P(1,0,x)}{P(0,1,x)}, \quad \frac{P(1,1,x)}{P(0,1,x)},$$

et ces quotients possèdent la propriété remarquable d'être doublement périodiques.

La constante A ne saurait jamais avoir une valeur réelle; car pour une valeur réelle et irrationnelle de A, on pourrait trouver pour les nombres entiers λ et λ', une infinité de valeurs telles que l'expression $\lambda + \lambda' A$ devînt moindre qu'un nombre arbitraire quelque petit qu'il fût; pour une valeur rationnelle de A, on pourrait trouver un nombre auquel cette expression deviendrait égale pour une infinité de valeurs de λ et de λ'. En sorte que, dans les deux cas, le produit infini ne saurait être convergent. On suppose d'ordinaire que A est purement imaginaire, c'est-à-dire de la forme $q\sqrt{-1}$, q étant réel; mais on pourrait donner à A une forme complexe quelconque sans que le double produit (2) cesse d'acquérir une valeur très-déterminée pour chaque valeur de x.

Cette définition que nous venons de donner des transcendantes elliptiques, et qui est plus générale que la définition ordinaire, conduit d'une manière fort simple à toutes les propriétés de ces fonctions. Je vais ici donner en peu de mots une idée de la voie qu'on pourrait suivre pour y parvenir.

D'abord on peut, en effectuant la multiplication d'après l'un des deux indices et en employant les formules connues pour les fonctions circulaires, transformer de deux manières les doubles produits infinis en des produits infinis simples, et l'on obtient le développement connu des fonctions elliptiques en produits infinis (*Evolutio prima;* Jacobi, *Fundamenta nova,* page 86). Mais, en considérant de plus près les résultats ainsi obtenus, on voit qu'ils consistent en deux fonctions nouvelles

$$5 \qquad \begin{cases} \varphi(z) = \left(z + \varepsilon\frac{1}{z}\right)(1+\varepsilon q z)\left(1+\varepsilon q\frac{1}{z}\right)(1-\varepsilon q^2 z^2)\left(1-\varepsilon q^2\frac{1}{z^2}\right) \text{ à l'infini,} \\ \psi(z) = (1+\varepsilon q z)\left(1+\varepsilon q\frac{1}{z}\right)(1-\varepsilon q z)\left(1-\varepsilon q\frac{1}{z}\right) \text{ à l'infini,} \end{cases}$$

dans lesquelles z désigne une variable nouvelle, fonction exponentielle de x, q une constante dépendante de A, et où $\varepsilon = \pm 1$.

On peut se convaincre, par une simple substitution des valeurs, que les deux fonctions φ et ψ satisfont aux équations

$$6 \qquad \varphi(z) = \varepsilon q z^2 \varphi(qz), \quad \psi(z) = \varepsilon q z^2 \psi(qz).$$

à l'aide desquelles le développement en série s'obtient immédiatement.

Posons

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} K_{2n+1} z^{2n+1}, \quad \psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} L_{2n} z^{2n},$$

nous obtiendrons à l'aide des équations (6) les équations suivantes entre les coefficients :

$$K_{n+1} = \varepsilon q^{n+1} K_n, \qquad L_{n+1} = \varepsilon q^{n+1} L_n,$$

desquelles il suit

$$7 \qquad \varphi(z) = K_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} z^n, \qquad \psi(z) = L_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} z^n.$$

Il est bien remarquable que chaque puissance de φ et de ψ, chaque fonction homogène quelconque des deux fonctions φ et ψ, peut être développée en une série toute semblable, pourvu qu'elle ne soit pas du 0e degré. En effet, soit F une fonction homogène du degré k. A l'aide des équations (6), on a

$$F(\varphi(z), \psi(z)) = F(\varepsilon q z \varphi(qz), \varepsilon q z \psi(qz)),$$

et, par suite des propriétés des fonctions homogènes,

$$F(\varepsilon q z \varphi(qz), \varepsilon q z \psi(qz)) = \varepsilon^k q^k z^k F(\varphi(qz), \psi(qz)).$$

Si donc on pose

$$F(\varphi(z), \psi(z)) = G(z),$$

on a la relation

$$8 \qquad G(z) = \varepsilon^k q^k z^k G(qz),$$

qui devra être employée comme formule fondamentale pour le développement.

En appliquant d'une manière spéciale le principe qui vient d'être indiqué, on arrive aussi à prouver que les fonctions φ et ψ satisfont à une équation différentielle de la forme

$$9 \qquad \left(\varphi \frac{d\psi}{dz} - \psi \frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = p\varphi^4 + p'\varphi^3\psi + p''\varphi^2\psi^2 + p'''\varphi\psi^3 + p^{iv}\psi^4,$$

ou bien que le quotient $y = \frac{\varphi}{\psi}$ satisfait à l'équation différentielle

$$10 \qquad \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = p + p'y + p''y^2 + p'''y^3 + p^{iv}y^4,$$

où $p, p', p'', \ldots$ sont des constantes qui ne dépendent que de A.

§ II.

La marche que nous venons d'indiquer rapidement peut être recommandée spécialement à ceux qui se laissent effrayer par les considérations très-compliquées du calcul intégral dont on part ordinairement pour arriver aux transcendantes elliptiques. Dans le fait, ces considérations ne paraissent guère propres à établir le point de départ

[*] *Evolutio tertia*; JACOBI, *Fundamenta nova*, page 183.

d'une aussi importante théorie, et ne peuvent réellement servir qu'à tracer la route historique qui a conduit à ces résultats. La définition qu'on donne ordinairement des fonctions elliptiques, définition tout à fait contraire à l'analogie dans les fonctions exponentielles, consiste en ce qu'elles sont les fonctions inverses d'intégrales connues chez lesquelles la fonction placée sous le radical monte au quatrième degré. Mais, comme il est difficile de se représenter une telle intégrale dont la différentielle passe subitement du réel à l'imaginaire, il doit paraître presque impossible à ceux qui étudient de se former une idée nette du retournement de cette intégrale, d'autant plus qu'on ne pourrait avoir recours ici à cette interprétation géométrique qui peut servir du moins pour les fonctions circulaires. La périodicité introduit, en outre, une difficulté particulière. Revenons pour un instant aux fonctions circulaires, pour n'avoir à nous occuper que d'une période simple. Si l'on veut, par exemple, définir le sinus comme une fonction de x donnée par l'équation

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = x,$$

on doit alors admettre, d'après les propriétés connues du sinus, que cette intégrale a une infinité de valeurs différentes pour chaque valeur donnée à y, ce qui est en contradiction avec le sens qu'on attribue ordinairement à une pareille intégrale (par exemple pour $y < 1$). De même, à cause de la double périodicité de sin $am.x$, il faudrait accorder que l'intégrale elliptique

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}} = x$$

acquiert pour chaque valeur de y une infinité de systèmes de valeurs en nombre infini.

Il se présente de plus grandes difficultés encore pour les intégrales abéliennes. Les fonctions inverses de ces intégrales doivent posséder une périodicité triple ou même d'une multiplicité supérieure. Mais, par une voie simple et rationnelle, en s'appuyant sur ce que M. Jacobi a dit de la triple périodicité dans le tome XIII du Journal de M. Crelle (*De Funct. duarum variab. quadr. per.*), on arrivera à se convaincre que, dans cette hypothèse, une intégrale abélienne, avec une limite inférieure tout à fait déterminée, peut recevoir toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, pour une valeur quelconque donnée à la variable. Si l'on nous accorde cela, l'intégrale abélienne cesse aussitôt d'être fonction de sa variable. Et comme c'est là une contradiction dans les termes, il en résulte seulement ou que l'intégrale n'a aucune signification analytique, ou bien que la définition qu'on donne d'une intégrale en général, définition d'où nous avons tiré toutes ces conséquences, n'est pas satisfaisante. Pour obvier à cet inconvénient, quand il s'agit, par exemple, de l'intégrale abélienne du premier ordre, l'illustre auteur des *Fundamenta* introduit à la fois deux intégrales, en posant

$$(1) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \varphi(x), \qquad \int_0^x \frac{xdx}{\sqrt{X}} = \psi(x),$$

dans lesquelles X est une fonction entière de x du cinquième ou du sixième degré, et il considère alors x et y comme fonctions des expressions

$$(2) \qquad u = \varphi(x) + \varphi(y), \quad v = \varphi(x) + \varphi(y),$$

de telle sorte qu'on ait

$$(3) \qquad x = \lambda(u, v), \quad y = \lambda(u, v).$$

Mais si nous accordons que la fonction $\varphi(x)$ peut avoir toutes les valeurs possibles pour chaque valeur de x, alors il en sera de même de $\varphi(y)$ pour chaque valeur de y; ainsi donc, à fortiori, la somme u pourra avoir toutes les valeurs possibles pour chaque valeur donnée de x et de y. On en peut dire autant de v; on ne voit donc pas bien nettement de cette manière comment il pourrait être question ensuite d'une dépendance quelconque entre u, v, x et y. On ne s'affranchirait de cette objection que si l'on disait : à chacune de ces valeurs en nombre infini de u ne correspond qu'une valeur pour v; mais il faudrait d'abord montrer ce que l'on doit entendre, à proprement parler, par *une telle association* de valeurs (par des valeurs ainsi combinées). En tous cas, il est aussi intéressant qu'indispensable de répandre une clarté parfaite sur les principes d'une matière si importante.

§ III.

L'analogie qu'on poursuit d'ordinaire quand on cherche à passer des grandeurs exponentielles et des transcendantes elliptiques à de nouvelles fonctions, consiste dans la forme des intégrales, ou, si l'on veut, dans la *forme des équations différentielles* auxquelles ces fonctions satisfont. Nous allons maintenant chercher une autre espèce d'analogie en recourant aux considérations exposées dans le § Ier. Par suite de la remarque qui y est faite sur les produits infinis simples et doubles relativement aux fonctions circulaires et elliptiques, nous devons considérer comme un analogue de degré supérieur, les *quotients des quotients des produits triples* infinis de la forme

$$\Pi\left(1 - \frac{x}{x - x'\lambda - x''\lambda''}\right),$$

où A et A′ sont des constantes et où λ, λ' et λ'' représentent des indices avec le sens qu'on y attache ordinairement.

Pour généraliser, désignons par

$$(1) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \ldots, \quad \lambda_n$$

n indices, et par

$$(2) \qquad A_1, \quad A_2, \ldots, \quad A_n$$

$n - 1$ constantes. Posons encore, pour abréger,

$$(3) \qquad x = x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + \ldots + x_n \lambda_n.$$

et, dans ces suppositions, considérons le produit

$$\Pi\left(1-\frac{x}{N}\right)^{\lambda},$$

dans lequel le signe de la multiplication s'étend aux valeurs de λ_1, λ_2, etc.

Si dans un tel produit on a $n > 2$, on ne saurait attribuer aux indices, indépendamment les uns des autres, toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, puisque le produit ne pourrait converger à cause de l'infinité de valeurs de N dont le module analytique se trouverait au-dessous d'une limite donnée quelque faible qu'on la suppose, et parce que, en outre, on serait ainsi conduit à des fonctions possédant une périodicité triple ou supérieure. Cela a lieu déjà quand $n = 2$ pour le cas spécial d'une valeur réelle de la constante. Ces produits multiples n'auraient plus alors, comme les produits simples et doubles, de sens analytique déterminé si l'on voulait attribuer aux indices toutes les valeurs possibles. Mais rien ne s'oppose plus à la considération de ces produits multiples aussitôt qu'on soumet les indices à certaines *restrictions* qui puissent écarter précisément ces circonstances contraires à la convergence : par exemple, certaines *conditions d'inégalité* qu'on pourrait établir entre les indices λ_1, λ_2,..., λ_n, et joindre au produit, de telle sorte que le signe de la multiplication s'étende aux valeurs des indices qui satisfont à ces conditions, les autres valeurs se trouvant exclues. Généralement parlant, on ne peut rien dire de plus ici sur le choix de ces équations de condition. Mais il existe une classe entière de fonctions semblables qui ont des rapports très-étroits avec certains résultats de la *Théorie des nombres;* et précisément les conditions d'inégalité dont nous parlons offrent une appropriation très-particulière pour cette nature de questions. Par exemple, on trouve toujours pour ces cas une combinaison d'un nombre déterminé de valeurs de l'expression N, qui acquiert une valeur réelle et *entière;* et les conditions d'inégalité ressortent alors de ce qu'elles réduisent à un N unique un groupe entier de valeurs en nombre infini de N pour lesquelles cette combinaison a la même valeur, et qui apparaissent comme termes d'une progression géométrique. Les fonctions auxquelles on est conduit par cette voie paraissent posséder des propriétés très-remarquables ; elles ouvrent la carrière aux plus belles recherches et semblent être le terrain où viennent se joindre les parties les plus difficiles de l'analyse et celles de la théorie des nombres.

Au reste, on pourrait appliquer aux *séries* auxquelles conduit la théorie des fonctions elliptiques, des considérations toutes semblables à celles qui viennent d'être exposées pour les produits infinis.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. WILLIAM ROBERTS

A M. LIOUVILLE.

[illegible]

« . . . Je viens de lire dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXI, page [illegible], une communication de M. Chasles relative aux arcs de la lemniscate de Bernoulli, et ou se trouve une génération de cette courbe dans le cercle.

» Je transcris :

» *Qu'autour d'un point pris au dehors d'un cercle, à une distance du centre égale au rayon multiplié par* $\sqrt{2}$, *on fasse tourner une droite et qu'on porte sur cette droite, à partir du point, un segment égal à la corde qu'elle détermine dans le cercle, ce segment sera le rayon vecteur d'une lemniscate.*

» La lecture de cette proposition m'a suggéré les remarques suivantes :

» **1**. Si le point fixe est choisi arbitrairement, la construction ci-dessus donnera le lieu des projections orthogonales du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole quelconque sur les tangentes à cette courbe.

» **2**. Si par un point pris sur la surface d'une sphère on fait passer des arcs de grands cercles qui coupent un petit cercle décrit sur la sphère avec le *rayon sphérique* α, et si, à partir du point fixe, on porte sur ces grands cercles des arcs égaux aux *cordes sphériques* correspondantes du petit cercle, les extrémités de ces arcs donneront une courbe représentée par l'équation polaire

$$\tang^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta}$$

θ est l'arc de grand cercle compris entre le point fixe et le pôle du petit cercle.

[illegible]

J'ai fait voir, dans votre Journal, que cette équation est celle d'une courbe obtenue en coupant une sphère par un cône du second ordre, dont le sommet est en un point de la surface sphérique, et dont l'un des axes principaux passe par le centre de cette surface; c'est aussi l'équation du lieu des extrémités des arcs de grands cercles abaissés perpendiculairement du centre d'une conique sphérique sur les grands cercles tangents à cette conique.

» **3**. Deux variétés de cette courbe présentent, comme je l'ai précédemment montré, des analogies remarquables avec la lemniscate ordinaire, de même que les coniques sphériques dont elle dérive ont avec l'hyperbole équilatère de grandes analogies. On obtient ces deux variétés en établissant entre α et δ les relations

$$\sin\delta = \sqrt{2}.\sin\alpha, \tag{1}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{2}.\sin\tfrac{1}{2}\delta. \tag{2}$$

» Quoique les résultats que je viens de vous indiquer n'aient pas par eux-mêmes un grand intérêt, je crois qu'ils valent la peine d'être mentionnés : ils confirment l'analogie entre une classe remarquable de courbes planes et une classe de courbes sphériques qui n'a pas, que je sache, été jusqu'ici remarquée, et qui peut servir à la représentation des fonctions elliptiques. »

NOTE

SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE;

PAR M. WILLIAM ROBERTS

Considérons une ellipse sphérique, dont les demi-axes sont les arcs λ et θ, et dont l'équation polaire est, par conséquent,

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\cos\omega}{\sin\lambda} + \frac{\sin\omega}{\sin\theta}.$$

l'aire sectorielle indéfinie aura pour sa valeur, par la formule connue, l'intégrale

$$2\int \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\, d\omega, \quad \text{ou} \quad \omega - \int d\omega \sqrt{\left(\frac{\tang\lambda\cos\omega + \tang\theta\sin\omega}{\tang\lambda\sec\theta\cos\omega + \tang\theta\sec\lambda\sin\omega}\right)}.$$

Supposons $\lambda < \theta$, et faisons

$$\tang\omega = \sqrt{1 - h^2}\,\tang\varphi, \quad \text{ou} \quad h = \sqrt{\left(1 - \frac{\tang\lambda}{\tang\theta}\right)}.$$

si l'on intègre depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura pour la quatrième partie (A) de l'aire sphérique, limitée par le périmètre de l'ellipse sphérique, l'expression

$$A = \tfrac{1}{2}\pi - \sqrt{1 - h^2}\cos\theta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1 - h^2\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - h^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}}.$$

ou, d'après la notation des fonctions elliptiques,

$$A = \tfrac{1}{2}\pi - \sqrt{1 - h^2}\cos\theta\,\Pi(-h^2, h\sin\theta)\,[*].$$

[*] On peut déduire cette expression de la formule donnée par M. Catalan [illegible]

Cela posé, si l'on différentie cette expression par rapport à δ, en supposant h constant, on trouvera

$$\frac{dA}{d\delta} = \sqrt{1 - h^2 \sin^2\delta}\left[\Pi - h^2 . h \sin\delta - h^2 \cos^2\delta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\varphi}{1 - h \sin\delta \sin\varphi} \frac{d\varphi}{1 - h^2 \sin^2\delta \sin^2\varphi}\right] d\delta.$$

On a, d'ailleurs,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\varphi}{1 - h \sin\delta \sin\varphi} \frac{d\varphi}{1 - h^2 \sin^2\delta \sin^2\varphi} = \frac{1}{h^2 \cos^2\delta}\left[\Pi - h^2 . h \sin\delta - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{1 - h \sin\delta \sin\varphi}\right]$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{1 - h \sin\delta \sin\varphi} = \frac{1}{1 - h^2 \sin^2\delta} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - h^2 \sin^2\delta \sin^2\varphi} = \frac{E\, h \sin\delta}{1 - h^2 \sin^2\delta},$$

en sorte que

$$\frac{dA}{d\delta} d\delta = \sqrt{1 - h^2} \frac{E\, h \sin\delta}{1 - h^2 \sin^2\delta} \sin\delta\, d\delta.$$

Cette différentielle a pour valeur géométrique la quatrième partie de la couronne elliptico-sphérique comprise entre deux cônes du second degré consécutifs, qui ont pour sommet commun le centre de la sphère, et dont le rapport des tangentes trigonométriques des demi-angles principaux est constant. Par conséquent, si l'on intègre depuis $\delta = 0$ jusqu'à $\delta = \frac{1}{2}\pi$, il est aisé de voir qu'on aura une expression pour la huitième partie de la surface sphérique totale; donc

$$\sqrt{1 - h^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{E\, h \sin\delta}{1 - h^2 \sin^2\delta} \sin\delta\, d\delta = \frac{\pi}{2},$$

et si l'on pose

$$h \sin\delta = k,$$

on transformera cette intégrale dans la suivante :

$$\int_0^{h} \frac{E\, k\, dk}{1 - k^2 \sqrt{h^2 - k^2}} = \frac{\pi h}{2\sqrt{1 - h^2}}.$$

Journal, tome VI, page 340, pour la portion de la surface sphérique interceptée par un cône du second ordre, dont le sommet est au centre de la sphère. Il faut substituer pour a et b, dans la notation de ce savant, tang θ et tang λ, et pour α et β, cosec θ et cosec λ.

On peut vérifier ce résultat par des considérations très-simples : en effet, on a

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots\right]$$

et, en divisant cette série par $1 - k^2$, on trouve

$$\frac{E(k)}{1-k^2} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 3k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 5k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 7k^6 + \ldots\right]$$

comme on le verra facilement en multipliant cette dernière série par la quantité $1 - k^2$. Donc, en se rappelant que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{k^{2n}\,dt}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n-2.2n}\,\frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

on déduit

$$\int_0^{\pi/2} \frac{E(k)\,k\,dk}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{2}k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \ldots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Sur un Mémoire de M. Serret, *relatif à la représentation des fonctions elliptiques;*

Par J. LIOUVILLE.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXI, page 1255

« 1. J'ai eu l'honneur de faire, il y a quelque temps, au nom d'une Commission composée de M. Lamé et de moi, un Rapport sur un Mémoire de M. Serret, relatif à la représentation géométrique des fonctions elliptiques. Ce Mémoire, dont l'Académie a ordonné l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*, contient, entre autres résultats remarquables, la découverte de diverses classes de courbes algébriques dont les arcs représentent identiquement les valeurs de certaines fonctions elliptiques de première espèce. Les modules des fonctions elliptiques dont il s'agit ont pour carrés les racines ζ d'équations du premier, du second,..., du $m^{ième}$ degré à volonté, équations où entre un paramètre indéterminé n et dont voici le mode général de formation.

» Soient

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)^m (z+a)^n}{(z+\alpha)^{m+n}}, \qquad \psi(z) = \frac{(z+a)^n (z-a)^m}{(z-\alpha)^{m+n}},$$

m et n désignant des nombres entiers positifs. Formez les dérivées $\varphi^m(z)$, $\psi^n(z)$ de l'ordre m et de l'ordre n respectivement. Elles donneront lieu à l'identité suivante

$$\frac{\varphi^m(\alpha)}{1.2\ldots m} + \frac{\psi^n(-\alpha)}{1.2\ldots n} = 0,$$

qui est très-facile à démontrer. Ainsi les équations

$$\varphi^m(\alpha) = 0, \quad \psi^n(-\alpha) = 0$$

n'établissent entre a et α qu'une seule relation. De plus, si l'on fait

$$\zeta = \frac{a+\alpha}{4a\alpha},$$

on trouve que $\varphi^m(\alpha)$ peut se mettre sous la forme

$$\text{A)} \qquad \varphi^m(\alpha) = 2^{m-n-1}\left(\frac{a+\alpha}{2}\right)^n \Pi_m(\zeta)$$

$\Pi_m(\zeta)$ désignant un polynôme en ζ, du degré m. Et c'est l'équation

$$\Pi_m(\zeta) = 0$$

qui fournira les racines ζ dont nous avons parlé tout à l'heure.

» M. Serret, dans son premier travail, s'était contenté d'écrire la valeur de Π_m sous la forme d'une double somme très-compliquée; mais de nouvelles recherches l'ont conduit depuis à un résultat d'une simplicité inespérée. Il a trouvé

$$\text{B)} \qquad \Pi_m(\zeta) = \frac{1}{2^m}\frac{d^m(\zeta-1)^m}{d\zeta^m}.$$

En particulier, pour $m = n$, et en posant $\zeta = \frac{x+1}{2}$, on a donc

$$\Pi_n = \frac{1}{2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

en sorte que les fonctions Π_n, divisées par $1.2\ldots n$, coïncident avec les fonctions X_n de Legendre, qui se présentent dans le développement de $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$.

» L'auteur a démontré la proposition précédente dans un Mémoire qu'il vient de publier et dont il m'a chargé d'offrir en son nom un exemplaire à l'Académie. La méthode dont il a fait usage conduit d'abord à une relation linéaire entre trois fonctions Π_m, Π_{m+1}, Π_{m+2}, puis à l'expression générale indiquée ci-dessus, et enfin à une équation différentielle du second ordre, à laquelle chaque fonction Π_m satisfait. Les géomètres en apprécieront toute l'utilité d'après les résultats importants qu'elle a fournis; toutefois, ils trouveront peut-être qu'elle exige des calculs un peu longs. Je me propose d'arriver ici directement,

et par un moyen facile, à l'expression de $\varphi^m(\alpha)$ ou de $\psi^n(-\alpha)$, dont on a besoin.

» Mais, auparavant, observons qu'on peut donner à l'expression de $\Pi_m(\zeta)$ plus d'élégance encore en s'appuyant sur l'identité

$$\text{(C)} \qquad \frac{\zeta^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n} = \frac{\zeta^m}{\Gamma(m+1)} \frac{d^m.\zeta^n(\zeta-1)^n}{d\zeta^m},$$

qui se démontre elle-même de suite en développant les puissances de $\zeta - 1$, effectuant les différentiations et comparant dans les deux membres les coefficients des termes où ζ est affecté du même exposant.

» D'après les équations (B) et (C), il vient

$$\text{D} \qquad \Pi_m(\zeta) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n},$$

de sorte qu'en mettant de côté le facteur numérique, les fonctions Π_m se confondent avec les simples différentielles

$$\frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n}.$$

C'est à la formule (D) que j'arriverai en formant, comme on va le voir, la valeur de $\varphi^m(\alpha)$.

» 2. Démontrons d'abord un lemme qui sert de base au nouveau procédé.

» La formule de Lagrange, appliquée à l'équation

$$y = \zeta + tF(y),$$

où ζ et t sont des variables dont la seconde est supposée assez petite pour la convergence de la série, nous donne

$$f(y) = \sum \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}.f'(\zeta)F(\zeta)^n}{d\zeta^{n-1}},$$

et, par suite,

$$f'(y)\frac{dy}{d\zeta} = \sum \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n.f'(\zeta)F(\zeta)^n}{d\zeta^n}.$$

Maintenant, soient

$$f'(y) = y^m \quad \text{et} \quad F(y) = y - 1,$$

ce qui donne

$$y = \frac{z-t}{1-t}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{1-t}.$$

il viendra

$$(E) \qquad \frac{z-t^n}{1-t^n} = \sum \frac{1}{1\,2\,3\ldots(n-1)} \frac{d^{n-1}\frac{z-1}{dz}}{dz}$$

» L'examen de diverses fonctions dans le développement desquelles figurent des quantités de la forme

$$\frac{d^{n-1}\frac{z-1}{dz}}{dz}.$$

m'avait conduit à la formule (E). Voici comment j'en ai déduit ensuite la valeur de $\varphi^m(z)$.

» 5. Puisque l'on a

$$\varphi(z) = \frac{1-a^n z-a}{z-z^{n+1}}.$$

la dérivée $\varphi^m(z)$ coïncide avec le coefficient de $u^m v^n$ dans le développement de

$$\frac{d^m}{dz^m}\frac{1}{(z-v-(1+a)u)(1-(1+a)u)}$$

suivant les puissances croissantes des deux indéterminées u et v. Or, la fraction qu'on doit à présent différentier, considérée comme fonction de z, se décompose en deux fractions simples

$$\frac{A}{z-av-(1-a)u} + \frac{B}{1-au-(1-a)u}$$

ou

$$A = \frac{1-a}{1-a+2-2av-u}, \qquad B = \frac{a}{1-a+2-2av-u}$$

et, par suite, la dérivée de l'ordre m, divisée par $1.2.3\ldots m$, est égale à

$$\frac{-(1-a)^m A}{(z-av-(1-a)u)^{m+1}} + \frac{Bu^m}{(1-au-(1-a)u)^{m+1}}$$

Comme nous n'avons besoin que du coefficient de $u^m v^n$ dans le déve-

loppement, nous pouvons supprimer le second terme qui contient partout le facteur u^{m+1}, puisque B contient le facteur u. En faisant $z = \alpha$, on voit donc que

$$\frac{2^m \alpha}{1.2\ldots m}$$

a pour valeur le coefficient de $u^m v^n$ dans le développement de

$$\frac{(-1)^m (1 - v^{n+1})}{(1 - v + a + \alpha - 2av - a)[2\alpha - a - \alpha v]^{m+1}}.$$

c'est-à-dire le coefficient de v^n dans le développement de

$$\frac{a - \alpha - 2av^n}{[2\alpha - a + \alpha v]^{m+1}}.$$

Mais, en posant

$$v = \frac{2\alpha t}{a - \alpha}, \qquad \zeta = \frac{a + \alpha}{4a\alpha},$$

cette dernière quantité devient

$$\frac{2^{n+1} a^n}{\alpha(a + \alpha)^{m+1}} \frac{\zeta - t^n}{1 - t^{m+1}}.$$

En vertu de la formule (E), le coefficient t^n, dans le développement, sera donc

$$\frac{2^n a^n}{\alpha(a + \alpha)^m} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n.(\zeta - 1)^m}{d\zeta^n}.$$

si l'on rétablit la variable v au lieu de t, il faudra multiplier par

$$\frac{a - \alpha}{2^n \alpha}$$

pour avoir le coefficient de v^n. On obtient ainsi finalement

$$\frac{\alpha^m \alpha}{1.2\ldots m} = 2^{m+n+1} \frac{(a - \alpha)^n a^n}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n.(\zeta - 1)^m}{d\zeta^n}$$

En permutant m et n, et changeant les signes de a et α, cette formule en donne une autre, savoir,

$$\frac{\alpha^n \alpha}{1.2\ldots n} = (-1)^n 2^{n+m+1} \frac{(a + \alpha)^m a^m}{\alpha^{m+1}} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \frac{d^m.(\zeta - 1)^n}{d\zeta^m}.$$

Nous savons d'avance que la somme des deux résultats doit être nulle, et c'est ce qu'on peut du reste vérifier à l'aide de l'équation identique (C). Réciproquement, si l'identité (C) n'était pas déjà démontrée, nous y arriverions comme à une conséquence nécessaire de l'équation

$$\frac{\varphi^m \chi}{1.2\ldots m} + \frac{\zeta^n \psi}{1.2\ldots n} = 0.$$

» L'expression de $\varphi^m \chi$, savoir,

$$\varphi^m \chi = \varphi^{m+1} \frac{(\alpha + \chi)^{m+1}}{\varphi^{m+1}} \frac{d^m}{1.2\ldots(m+1)} \frac{d(\zeta^{n+1})}{d\zeta},$$

qu'on déduit de notre analyse, étant comparée à celle que donne la formule (A), on en conclut

$$\Pi_n \zeta = \frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots(n+1)} \cdot \frac{d(\zeta^{n+1})}{d\zeta},$$

comme nous l'avions annoncé.

» **4.** Ainsi, l'équation

$$\Pi_n \zeta = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{d(\zeta^{n+1})}{d\zeta} = 0.$$

— Appliquons n fois de suite le théorème de Rolle à l'équation

$$F(\zeta) = \zeta^m (\zeta - 1)^n = 0,$$

qui a m racines égales à 0 et n racines égales à 1; l'équation dérivée $F'(\zeta) = 0$ en aura donc $(m-1)$ égales à 0, $(n-1)$ égales à 1, et une ζ_1 comprise entre 0 et 1; $F''(\zeta) = 0$ en aura $(m-2)$ égales à 0, $(n-2)$ égales à 1, et deux ζ_1, ζ_2, comprises entre 0 et ζ_1 d'une part, ζ_1 et 1 de l'autre. En continuant ainsi jusqu'à la dérivée de l'ordre n, et dans l'hypothèse de n au moins égal à m, on verra que les m racines de l'équation

$$\frac{d(\zeta^{n+1})}{d\zeta} = 0$$

sont réelles, inégales, et comprises entre 0 et 1; théorème d'une Lande

importance dans la question où cette équation se présente, et dont il était bon de rappeler la démonstration déjà donnée par M. Serret. La même méthode appliquée au cas de $m > n$ prouverait qu'alors l'équation a $m - n$ racines nulles et seulement n racines distinctes comprises entre 0 et 1.

» 5. Chaque fonction $\Pi_m(\zeta)$ satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. Soit, en effet,

$$X = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)}\zeta^m(\zeta-1)^n, \quad \text{d'où} \quad \Pi_m = \frac{d^n X}{d\zeta^n}.$$

En prenant la différentielle à indice $(n+1)$ de l'équation, facile à vérifier,

$$(\zeta^2 - \zeta)\frac{dX}{d\zeta} - [m - (m+n)\zeta]X = 0,$$

on aura donc

$$\zeta^2 - \zeta)\frac{d^2\Pi_m}{d\zeta^2} + [n - m + 2)\zeta + m - n - 1]\frac{d\Pi}{d\zeta} - m(n+1)\Pi_m = 0,$$

comme M. Serret l'a trouvé.

» En général, les fonctions Π dépendent de la variable ζ et des indices m, n, qu'il conviendrait de mettre tous les deux en évidence, en écrivant

$$\Pi_m^n(\zeta) \quad \text{ou} \quad \Pi_n^m(\zeta),$$

expression qui, d'après ce que nous avons vu, représenterait indifféremment l'une ou l'autre des quantités équivalentes

$$\frac{1}{\zeta^{n-m}}\frac{d^n(\zeta^m(\zeta-1)^m)}{d\zeta^m}, \quad \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n(\zeta^m(\zeta-1)^n)}{d\zeta^n}.$$

» On déduit immédiatement de là cette formule

$$\Pi_n^m = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)}\zeta^{n-m}\Pi_m^n,$$

qui permet de permuter entre eux les indices inférieur et supérieur.

» On peut introduire les fonctions Π_m^n dans le second membre de

la formule (E), qui devient alors

$$(G)\qquad \frac{\zeta - t^m}{1 - t^m} = \frac{1}{1 - m + 1} \sum t^n \Pi_m^n,$$

le signe $\sum$ se rapportant toujours à n.

» En différentiant les deux membres par rapport à ζ, et multipliant ensuite par $\zeta - t$, on trouve aisément

$$m \sum t^n \Pi_m^n = (\zeta - t) \sum t^n \frac{d\Pi_m^n}{d\zeta}.$$

il en résulte, par la comparaison des puissances semblables de t,

$$m\Pi_m^n = \zeta \frac{d\Pi_m^n}{d\zeta} - \frac{d\Pi_m^{n-1}}{d\zeta}.$$

» En différentiant, au contraire, l'équation (G) par rapport à t, et multipliant ensuite par $(\zeta - t)(1 - t)$, on verra que les deux quantités

$$[\zeta - 1 + \zeta(1 - t^2)] \sum n t^{n-1} \Pi_m^n$$

et

$$[m + 1)\zeta - m - t] \sum t^n \Pi_m^n$$

sont égales entre elles. De là, entre trois fonctions consécutives

$$\Pi_m^{n+2}, \quad \Pi_m^{n+1}, \quad \Pi_m^n,$$

la relation linéaire

$$n + 2)\zeta \Pi_m^{n+2} = [m - n - 2)\zeta + n - m + 1] \Pi_m^{n+1} - (n + 1) \Pi_m^n$$

En changeant m en n et n en m, il s'ensuit

$$m + 2)\zeta \Pi_n^{m+2} = [(m - n + 2)\zeta - m - n - 1] \Pi_n^{m+1} - (m + 1) \Pi_n^m$$

Si donc on permute, à l'aide de la formule (F), les indices inférieurs et supérieurs, on en conclura

$$\Pi_{m+2}^n = [(n - m - 2)\zeta - n - m - 1] \Pi_{m+1}^n - (m + 1)\zeta \Pi_m^n$$

C'est cette dernière relation que M. Serret a d'abord obtenue, et c'est par elle qu'il a été conduit à l'expression simple des fonctions Π.

» Que l'on change m en $m-1$ dans la formule (G), et l'on en tirera encore immédiatement

$$1-t\sum t^n \Pi_{m+1} = (m+1)(\zeta-t)\sum t^n \Pi_m;$$

donc

$$\Pi_{m+1} - \Pi_{m+1} = (m-1)(\zeta \Pi_m^{(m+1)} - \Pi_m^{(m)}).$$

» En général, les divers développements où les fonctions Π entrent comme coefficients mènent à de nombreuses propriétés de ces fonctions; mais nous n'avons pas l'intention, pour le moment, de suivre ces recherches.

» **6**. Terminons en donnant de la formule (E), qui nous a été si utile, une démonstration nouvelle, plus élémentaire en ce sens qu'on n'y fait point usage de la série de Lagrange, et qui repose d'ailleurs sur des considérations toutes semblables à celles dont nous nous sommes servis pour trouver $\varphi^m(z)$.

» La dérivée

$$\frac{d^m(\zeta^n(\zeta-1)^n)}{d\zeta^m}$$

est précisément le coefficient de $u^m v^n$ dans le développement de

$$\frac{d^m}{d\zeta^m}\frac{1}{(1-v\zeta)(1-(\zeta-1)u)},$$

suivant les puissances croissantes de u et v. Or, la fraction qu'on doit à présent différentier, considérée comme fonction de ζ, se décompose en deux fractions simples

$$\frac{A}{1-v\zeta} + \frac{B}{1+u-u\zeta},$$

où

$$A = \frac{v}{v-(1-v)u}, \qquad B = -\frac{u}{v-(1-v)u},$$

de là, pour la dérivée de l'ordre m, divisée par $1.2\ldots m$, cette valeur

$$\frac{Av^m}{(1-v\zeta)^{m+1}} + \frac{Bu^m}{(1+u-u\zeta)^{m+1}}.$$

Comme nous n'avons besoin que du coefficient de $u^m v^n$, nous pouvons supprimer le second terme qui contient partout le facteur u^{m+1}, puisque B contient le facteur u. Reste le premier terme, savoir,

$$\frac{v^{m-1}}{v-1(1-vu)(1-v\zeta^{m+1})},$$

dans le développement duquel on doit chercher le coefficient de $u^m v^n$; cela revient à chercher le coefficient de v^n dans le développement de

$$\frac{(1-v)^m}{(1-v\zeta^{m+1})}.$$

Nous sommes donc assurés que

$$\frac{1}{1.2\ldots m}\frac{d^m.\zeta^m(\zeta-1)^m}{d\zeta^m}$$

exprime le coefficient de v^n dans ce dernier développement. Posons $v=\frac{t}{\zeta}$, et multiplions tout par ζ^m; il s'ensuivra que le coefficient de t^n dans le développement de

$$\frac{(\zeta-t)^m}{(1-t\zeta^{m+1})}$$

est

$$\frac{1}{\Gamma(m+1)}\frac{1}{\zeta^{n-m}}\frac{d^m.\zeta^m(\zeta-1)^m}{d\zeta^m},$$

c'est-à-dire, eu égard à l'identité (C),

$$\Gamma\frac{1}{n+1}\frac{d^n.\zeta^n(\zeta-1)^n}{d\zeta^n}$$

La formule (E) est donc démontrée. »

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Communication de M. Liouville à l'Académie des Sciences. — *Comptes rendus*, t. XXI, p. 1410.

« M. Liouville entretient l'Académie de quelques théorèmes qui lui ont été communiqués par un géomètre de Dublin, M. Michael Roberts [*]. Ces théorèmes très-intéressants sont surtout relatifs aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure que l'on peut tracer sur la surface d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. M. Michael Roberts fait voir, par exemple, que les lignes géodésiques qui partent, dans toutes les directions, d'un des ombilics de la surface, vont nécessairement aboutir à l'ombilic opposé, où elles arrivent avec des longueurs égales. Il prouve aussi que les lignes de courbure, considérées par rapport à deux ombilics intérieurs, pris pour foyers, offrent la plus grande analogie avec l'ellipse ordinaire, et pourraient être décrites, comme elle, au moyen d'un fil attaché par ses extrémités à ces points fixes. En effet, la somme des deux arcs géodésiques menés des foyers à un point reste constante quand le point se meut sur la ligne de courbure à laquelle il appartient. On trouve la même analogie avec l'hyperbole en prenant pour foyers un ombilic intérieur et un ombilic extérieur.

M. Michael Roberts démontre ces théorèmes d'une manière très-simple en partant de l'équation différentielle des lignes géodésiques, mise sous la forme

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \beta,$$

que M. Liouville lui a donnée dans le *Journal de Mathématiques* (tome IX, page 401). Les démonstrations de l'auteur reposent, d'une part, sur ce que β a la même valeur pour toute ligne géodésique passant par un ombilic quelconque; d'autre part, sur ce que, pour une

[*] Le Mémoire de M. Michael Roberts paraîtra dans un prochain cahier.

valeur donnée de β, et en un point μ, ν, on n'a pour $\tang^2 i$ qu'une seule valeur, en sorte que deux lignes géodésiques qui répondent à une même valeur de β, ne peuvent se rencontrer sur une ligne de courbure sans faire avec elle, d'un côté ou d'un autre, des angles égaux. Ces lemmes qu'on établit immédiatement étant admis, soit MM′ une ligne de courbure, et menons des quatre ombilics au point M les arcs géodésiques AM, BM, CM, DM. La valeur de β restant la même pour ces arcs, ils devront tous faire de divers côtés le même angle avec MM′; donc ils seront deux à deux le prolongement l'un de l'autre, et si A et C sont deux ombilics opposés, la ligne géodésique AM se continuera par MC jusqu'au point C. De plus, quand on passe du point M à un point infiniment voisin M′, AM augmente ou diminue, d'après un théorème de M. Gauss, de la projection de MM′ sur AM; à cause de l'égalité des angles en M, CM diminue ou augmente de la même quantité. La somme ou l'arc total AMC conserve donc la même valeur, quelle que soit la direction primitive en A. On arrive de la même manière aux égalités

$$\mathrm{AM} + \mathrm{BM} = \text{constante}, \quad \mathrm{AM} - \mathrm{DM} = \text{constante}.$$

La longueur constante de AMC est évidemment celle du demi-périmètre de l'ellipse, qui sur la surface et dans un plan perpendiculaire à l'axe moyen passe par les quatre ombilics; mais il faut remarquer que les arcs indéfinis AM, partant d'un ombilic, s'expriment aussi par des arcs d'ellipses, quoique en général l'expression d'un arc géodésique dépende des transcendantes abéliennes.

» D'autres propositions se déduisent de ce que β conserve une même valeur pour toutes les lignes géodésiques qui sont tangentes à une même ligne de courbure. On conclut aisément de là que si deux lignes géodésiques sont tangentes à deux lignes de courbure données, et se coupent à angle droit, le lieu de leur intersection aura tous ses points à égale distance du centre de l'ellipsoïde, et sera une sphéroconique; la condition de toucher une ligne géodésique donnée pourrait être remplacée par celle de partir d'un ombilic. Nous ajouterons encore ce théorème que M. Roberts ne paraît pas avoir aperçu, mais qu'on déduit aisément de ce qui précède, comme l'a remarqué M. Chasles : Si deux lignes géodésiques sont menées d'un quelconque

des points d'une ligne de courbure tangentiellement à une autre ligne de courbure de même espèce, la somme de ces deux lignes géodésiques aura avec l'arc intercepté sur la seconde ligne de courbure une différence constante. Cette propriété est analogue à celle des ellipses planes homofocales. L'analogie des lignes de courbure de l'ellipsoïde avec les systèmes de coniques planes homofocales se manifeste au reste sous différents points de vue; c'est ce qu'on peut voir en particulier par le théorème suivant que cite M. Roberts, et qui est dû à M. Mac-Cullagh: Les lignes de courbure de l'ellipsoïde se projettent sur les plans des sections circulaires, par des droites parallèles à l'axe minimum de la surface, en coniques homofocales ayant pour foyers les projections des ombilics. Relativement aux sphéro-coniques dont on a parlé tout à l'heure, et dont l'équation sur la surface de l'ellipsoïde est de la forme

$$\mu^2 + \nu^2 = \text{constante},$$

M. Mac-Cullagh trouve qu'elles se projettent en cercles concentriques.

» En terminant l'analyse des beaux résultats obtenus par M. Michael Roberts, M. Liouville fait observer que l'équation

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \beta,$$

dont cet habile géomètre s'est servi, revient à une autre équation

$$\text{PD} = \text{constante},$$

que l'on doit à M. Joachimsthal et qui se prête aussi très-bien aux considérations géométriques; enfin, il rappelle que c'est M. Jacobi qui a ici ouvert la route et vaincu le premier les grandes difficultés du sujet par une découverte capitale, en intégrant l'équation des lignes géodésiques sur un ellipsoïde quelconque. »

TABLES DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES TOMES 6, 7, 8, 9 ET 10

SUIVIES D'UNE TABLE GÉNÉRALE

PAR

NOMS D'AUTEURS.

TOME VI (Année 1841).

Pages.

Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati, par *J. Liouville* 1

Note sur la vraie valeur des fractions qui prennent la forme $\frac{\infty}{\infty}$, par M. *Bertrand* . 14

Mémoire sur une formule de Vandermonde et son application à la démonstration d'un théorème de M. Jacobi; par M. *V.-A. Lebesgue* 17

Sur l'intégrale $\int_0^{2\pi} \cos(\ldots u \ldots) \sin u \, du$; par *J. Liouville* 36

Mémoires sur les surfaces isostatiques dans les corps solides homogènes en équilibre d'élasticité; par M. *G. Lamé* 57

Remarque sur une courbe qui est sa propre développée, et sur un genre de surfaces qui contiennent le lieu des centres de l'une de leurs deux espèces de courbures; par M. *J. Bonnet* 60

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville; par M. *P.-H. Blanchet* 65

Sur une formule de M. Jacobi, par *J. Liouville* 69

Solution d'un problème de combinaisons; par M. *E. Catalan* 74

Deux problèmes de probabilités; par *le même* 76

Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple, par *le même* 80

Note sur la théorie de la convergence et de la divergence des séries; par M. *J.-L. Raabe* 81

Expériences sur les oscillations de l'eau dans une grande conduite de Paris; par M. *A. de Caligny* 85

Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général; par M. *J. Steiner* ..... [illegible]

Sur la résolution des équations numériques à une ou plusieurs inconnues et de forme quelconque; par M. *F. Sarrus* ..... [illegible]

Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces; par M. *A. Transon* ..... [illegible]

Thèse sur la distinction des maxima et des minima dans les questions qui dépendent de la méthode des variations; par M. *Ch. Delaunay* ..... [illegible]

Note sur l'intégrale $\int_0^{2\pi} \ldots d\ldots$, par M. *Ossian Bonnet* ..... [illegible]

Remarques sur la théorie géométrique des axes permanents de rotation; par M. *G. Gascheau* 241

De la ligne géodésique sur un ellipsoïde, et des différents usages d'une transformation analytique remarquable; par M. *Jacobi* .. 267

Démonstration élémentaire d'un théorème de Legendre relatif à la trigonométrie sphérique; par M. *Gaultier* ..... [illegible]

Notice sur un manuscrit hébreu du Traité d'Archimède, par M. *Ch. Ad. Wurtz* ..... [illegible]

Des propriétés osculatrices de deux surfaces en contact par un point; par M. *Théodore Olivier* ..... [illegible]

Pages.

Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante; par M. *Ch. Delaunay* 309
Note à l'occasion de l'article précédent; par M. *Sturm* 315
Système de fontaines intermittentes et d'appareils à élever l'eau sans pièce mobile; par M. *A. de Caligny* 321
Problème de calcul intégral; par M. *E. Catalan* 340
Mémoire sur quelques propositions générales de géométrie et sur la théorie de l'élimination dans les équations algébriques; par *J. Liouville* 345
Sur le degré de l'équation finale qui résulte de l'élimination; par M. *Mondeig* 412
Problèmes de calcul intégral; par M. *E. Catalan* 416
Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville; par M. *A. Transon* 441
Sur une classe d'équations différentielles; par *J. Liouville* 448
Recherches sur la théorie des nombres entiers et sur la résolution de l'équation indéterminée du premier degré qui n'admet que des solutions entières; par *J. Binet* 449
Note sur la convergence des suites; par *le même* 491

TOME VII (ANNÉE 1842).

Pages.

Note sur la sommation de quelques séries; par M. *E. Catalan* 1
Mémoire sur la délimitation de l'onde dans la propagation des mouvements vibratoires, par M. *P.-H. Blanchet* 13
Mémoire sur une circonstance remarquable de la délimitation de l'onde; par M. *P.-H. Blanchet* 23
Règles sur la convergence des séries; par M. *J. Bertrand* 35
Note sur un point du calcul des variations; par *le même* 55
Note sur le centre de gravité d'un triangle sphérique quelconque, et d'une pyramide sphérique; par M. *L.-A.-S. Ferrot* 59
Problème de géométrie; par M. *Puiseux* 65
Thèse sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe; par M. *Briot* 70
Démonstration élémentaire d'une formule analytique remarquable, suivie de quelques propositions arithmétiques qui s'en déduisent; par M. *C.-G.-J. Jacobi* 85
Extrait d'un Mémoire sur un cas particulier du problème des trois corps; par *J. Liouville* 110
Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce; par M. *A. Serret* 114
Sur quelques propriétés des courbes et des surfaces du second degré; par M. *E. Brassine* 120
Application du théorème de M. Sturm aux transformées des équations binômes; par M. *G. Gaucheron* 126
Note à l'occasion de l'article précédent; par M. *Sturm* 132
Sur l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)\frac{dy}{dx} + F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

par *J. Liouville* 134
Démonstration de quelques théorèmes relatifs aux résidus et aux non résidus quadratiques; par *V.-A. Lebesgue* 138
Sur les fractions qui se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; par *J. Liouville* 160
Sur un problème de géométrie relatif à la théorie des maxima et des minima; par *J. Liouville* 163
Note sur un passage de la *Mécanique analytique*; par M. *J. Bertrand* 165
Question de probabilité applicable aux décisions rendues par les jurés; par M. *Coste* 169
Note sur le nombre des points multiples des courbes algébriques; par *le même* 184
Sur l'ellipse de plus petite surface qui passe par trois points A, B, C, et sur l'ellipsoïde de plus petit volume qui passe par quatre points A, B, C, D; par *J. Liouville* 190
Du jeu de loto; par M. *Du Hays* 192
Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum; par M. *E. Catalan* 203
Note sur un théorème de mécanique; par M. *J. Bertrand* ..... [illegible]
Démonstration d'un théorème de géométrie; par *le même* 218
Mémoire sur les lois de la réflexion et de la

réfraction cristalline; par M. *James MacCullagh* 417
Sur l'intégration des équations linéaires à coefficients constants; par M. *Duran* 426
Démonstration d'un théorème de M. Biot sur les réfractions astronomiques, près de l'horizon; par *L. Lamarle* 505
Sur une propriété de la projection stéréographique; par M. *Chasles* 507
Théorèmes généraux sur les forces attractives et répulsives qui agissent en raison inverse du carré des distances; par M. *C.-F. Gauss* 509
De la résolution en nombres entiers de l'équation $ax^3 + b = y^2$, des séries récurrentes qui en resultent, et de l'ordre à suivre dans la solution de l'équation [illegible]; par M. *Du Hou* 513
Note sur la réflexion de la lumière sur les surfaces des métaux; par M. *Augustin Cauchy* 515
Note sur un Mémoire de M. Chasles; par M. *Sturm* 516
Démonstration d'un théorème d'algèbre de M. Sylvester; par *le même* 516
Recherche théorique des lois d'après lesquelles la lumière est réfléchie et refractee à la limite commune de deux milieux complétement transparents; par M. *F.-E. Neumann* 516
Note sur une formule de combinaisons; par M. *J. Catalan* 516
Sur le centre de gravite d'un triangle spherique; par M. *B.* [illegible] 517
Note sur le mouvement d'un point materiel pesant sur une sphère; par M. *Puiseux* . . 517

TOME VIII. ANNÉE 1843.

Note sur quelques formules de calcul intégral; par M. *A. Serret* 1
Nouveau système de fontaines intermittentes sous-marines. Théorie et modèle fonctionnant; par M. *Anatole de Caligny*; suivi d'une Note de M. *Combes* 4
Sur quelques propriés des centres de gravité; par M. *J. Bertrand* 9
Theorèmes nouveaux sur l'equation indéterminée $ax^2 + b$ [illegible]; par M. *J.* [illegible] 12
Note sur le mouvement d'une chaîne pesante infiniment mince sur la cycloïde; par M. [illegible] 13
Note sur la convergence et la divergence des [illegible]; par M. *O.* [illegible] *Bonnet* 13
Détermination de l'intégrale définie

$$\int \frac{\ldots}{\ldots}$$

par M. *J. Bertrand* 17
Memoire sur un phénomene relatif à la communication des mouvements vibratoires; par M. *Duhamel* 18
Sur les trajectoires qui coupent sous un angle [illegible] courbure; par M. *H. Mo*[illegible] 130
Note sur les fonctions elliptiques de première espèce; par M. *A. Serret* 1
Remarques sur la théorie des maxima et minima de fonctions à plusieurs variables; par M. *J. Bertrand* 1
Mémoire sur une nouvelle méthode de generation et de discussion des surfaces du deuxième ordre; par M. *B. Ar*[illegible] 1
Démonstration d'un théorème de geometrie; par M. *J. Bertrand* 1
Théorèmes sur les surfaces du second degré; par M. [illegible] 1
Du developpement des fonctions trigonometriques en produits de facteurs binômes; par M. *Olinde Rodrigues* 1
Note sur l'évaluation des arcs de cercle, en fonction linéaire des sinus ou des tangentes de fractions de ces arcs, décroissant en progression géométrique; par M. *Olinde Rodrigues* 1
Note sur une classe d'interales définies multiples; par M. *Tchebichef* 1
Note sur une formule relative aux integrales [illegible]; par M. *L. Cauchy* 1
Note sur la ligne de longueur donnée qui renferme une aire maximum sur une surface [illegible]; par M. *Duhamel* 1
Note sur la détermination d'une fonction [illegible]; par M. *O.* [illegible] 1
[illegible] 1

Pages.

définies; par M. *Cellérier* 255

Sur une représentation géométrique des fonctions elliptiques de première espèce; par M. *William Roberts* 263

Sur l'équation $\frac{d^2z}{dv^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0$; par *J. Liouville* 265

Sur les nombres premiers complexes que l'on doit considérer dans la théorie des résidus de cinquième, huitième et douzième puissance; par M. *C.-G.-J. Jacobi* 268

Recherches sur l'orbite de Mercure et sur ses perturbations. Détermination de la masse de Vénus et du diamètre du Soleil; par M. *U.-J. Le Verrier* 273

Sur la loi de la pesanteur à la surface ellipsoïdale d'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation; par *J. Liouville* 360

Note sur la théorie mathématique de la double refraction; par M. *H. Senarmont* . 361

De la détermination, sous forme intégrale, des équations des développées des courbes à double courbure; par M. *H. Molins* ... 379

Remarques sur un Mémoire de N. Fuss; par *J. Liouville*; suivies d'une Note de M. *J. Binet* 391

Mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes; par M. *G. Lamé* 397

Mémoire sur le mouvement propre du système solaire dans l'espace; par M. *A. Bravais* 435

Sur quelques formules relatives à la théorie des intégrales eulériennes; par M. *J.-A. Serret* 489

Propriétés géométriques relatives à la théorie des fonctions elliptiques; par *le même* ... 497

Rapport fait à l'Académie des Sciences de l'Institut, au nom d'une Commission composée de MM. *Lamé* et *Liouville*, sur un Mémoire de M. Hermite, relatif à la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques; par *J. Liouville*; suivi d'une Lettre de M. *Jacobi* à M. *Hermite* 502

Sur la division du périmètre de la lemniscate, le diviseur étant un nombre entier réel ou complexe quelconque; par *J. Liouville* 507

Sur un théorème d'Abel; par *le même* 513

Note sur la méthode de recherche des surfaces isothermes; par M. *G. Lamé* 515

TOME IX (Année 1844).

Pages.

Mémoire sur la poussée que des terres nouvellement remuées exercent contre le parement d'un mur d'appui; par M. *P.-D. Saint-Guilhem* 1

Mémoire de géométrie; par M. *Auguste Miquel* 20

Sur une propriété mécanique de la lemniscate, découverte par N. Fuss; par M. *J.-A. Serret* 28

Mémoire sur la théorie des marées; par M. *Ch. Delaunay* 29

Mémoire sur les ondes successives; par M. *Blanchet* 73

Propriétés géométriques et mécaniques de quelques courbes remarquables; par M. *Ossian Bonnet* 97

Note sur un théorème de mécanique; par *le même* 113

Note sur une propriété de la lemniscate; par *le même* 116

Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales; par M. *J. Bertrand* 117

Mémoire sur la théorie des surfaces; par *le même* 133

Sur une représentation géométrique des trois fonctions elliptiques; par M. *William Roberts* 155

Note à l'occasion du Mémoire précédent; par M. *J.-A. Serret* 160

Note sur une formule d'Euler; par M. *E. Catalan* 161

Note sur l'héliostat; par M. *Cabart* 175

Note sur une propriété relative aux racines d'une classe particulière d'équations du troisième degré; par M. *Lobatto* 177

Intégration d'une équation différentielle qui se présente dans la théorie de la flexion des verges élastiques; par M. *de Saint-Venant* 191

Mémoire sur l'intégration d'une équation

Page.

différentielle à l'aide des différentielles à indices quelconques ; par M. *J.-A. Serret*. 193

Solution de quelques problèmes de mécanique ; par M. *Ossian Bonnet* 217

Note sur la théorie de l'attraction ; par M. *William Thomson*..... 23[illegible]

Recherches sur la théorie des nombres complexes ; par M. *Lejeune-Dirichlet* ..... 24[illegible]

Note sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires ; par M. *de Saint-Venant* 270

Note sur les flexions considérables des verges élastiques ; par *le même*..... 275

Mémoire sur les courbes du troisième ordre ; par M. *A. Cayley*..... 285

Sur une équation différentielle à indices fractionnaires ; par M. *Bouquet*..... ..... 29[illegible]

Sur quelques nouveaux caractères propres à reconnaître l'imaginarité de deux racines d'une équation numérique, situées entre des limites données ; par M. *R. Lobatto* 29[illegible]

Addition à la Note sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires. — Démonstration géométrique et directe des relations binomes ; par M. *de Saint-Venant* [illegible]

Mémoire sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps ; par M. *Jacobi* 31[illegible]

Note relative à l'élimination ; par M. *Finck*. 334

Sur l'équation $\frac{du}{dx} = \frac{Au}{a + bx + cx^2}$; par M. *Bouquet*..... [illegible]

M. *Bouquet*..... [illegible]

Développements sur un théorème de géométrie ; par *J. Liouville*..... [illegible]

Sur une propriété des sections coniques ; par *le même*..... [illegible]

Sur la théorie des transcendantes à différentielles algébriques ; par M. *Hermite*..... 353

Sur la détermination des orbites planétaires ; par M. *Abel Transon*..... [illegible]

Note sur la détermination de la surface moyenne d'un rectangle dont les côtés peuvent varier entre des limites données ; par M. *Breton de Champ*..... [illegible]

Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes ; par M. *Puiseux*..... [illegible]

Note sur la courbure des surfaces ; par M. *Finck*..... [illegible]

De la ligne géodesique sur un ellipsoïde quelconque ; par *J. Liouville*..... 401

Sur les courbes tautochrones ; par M. *Puiseux*..... [illegible]

Sur les intégrales aux différences finies ; par M. *Rodolphe Lipschitz*..... [illegible]

Sur les rayons de courbure des courbes géométriques ; par *J. Liouville*..... [illegible]

Note sur l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$; par M. *J.-A. Serret*..... [illegible]

TOME X (ANNÉE 1845).

Page.

Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres ; par M. *Poinsot*.. 1

Nouvelles remarques sur les courbes du troisième ordre ; par M. *A. Cayley*..... [illegible]

Mémoire sur les diverses propriétés des surfaces du deuxième ordre déduites de la théorie des focales ; par M. *B. Amiot*.... 109

Démonstration d'un théorème d'analyse ; par M. *William Thomson*..... [illegible]

Méthode géométrique pour les rayons de courbure d'une certaine classe de courbes ; par M. *Abel Transon*..... 148

Note à l'occasion du Mémoire précédent ; par M. *Cayley*..... [illegible]

Sur quelques intégrales multiples ; par M. *A. Cayley*..... [illegible]

Sur les deux formes

$x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$,

par *J. Liouville*..... 169

Équations [illegible] par M. *Tisserand*..... [illegible]

Application de la théorie des transcendantes elliptiques à la rectification d'une classe étendue de courbes planes ; par M. *William Roberts*..... [illegible]

Pages

Note sur la transformation et l'intégration d'une classe d'équations différentielles simultanées à plusieurs variables; par M. *E. Beaussier* 194

Construction des rayons de courbure des courbes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan; par M. *Chasles* 204

Note sur les lois élémentaires de l'électricité statique, par M. *William Thomson* ..... [illegible]

Sur quelques questions d'analyse et de physique mathématique; par *J. Liouville* 229

Sur les fonctions de Laplace, qui résultent du développement de l'expression

$$\left\{ \left[\cos\alpha\cos z + \sin\alpha\sin z\cos(\ldots - \gamma') \right] + a^2 \right\}^{-\frac{1}{2}};$$

par M. *Jacobi* 229

Sur les exponentielles successives d'Euler et les logarithmes des différents ordres des nombres, par M. *J. H. Grollet* 233

Addition à la Note sur quelques intégrales multiples, insérée dans le cahier d'avril; par M. *A. Cayley* 242

Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables; par *le même*. 245

Note sur les systèmes généraux de trajectoires orthogonales; par M. *Michael Roberts* ..... [illegible]

Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultra-elliptiques, par M. *J.-A. Serret* ..... [illegible]

Addition au Mémoire précédent; par *le même* 286

Rapport sur ce Mémoire; par *J. Liouville* .. 290

Note de M. *J. Liouville* 293

Mémoire sur quelques propriétés géométriques relatives aux fonctions elliptiques; par M. *William Roberts* 297

Note sur l'intégration de l'équation différentielle

$$A\ldots + A'\ldots + A''\ldots = 0$$
$$B\ldots + B'\ldots + B''\ldots = C\ldots + C'\ldots + C''\ldots$$

par M. *J. Liouville* ..... [illegible]

Note sur les principes de la mécanique; par M. *A. Jacobi* ..... [illegible]

Pages

Sur une propriété générale d'une classe de fonctions; par *J. Liouville* 327

Note relative à l'instabilité de l'équilibre d'un système de points matériels; par M. *Jules Vieille* ..... [illegible]

Sur le principe du dernier multiplicateur et sur son usage comme nouveau principe général de mécanique; par M. *Jacobi* 337

Mémoire de géométrie (deuxième partie); par M. *Auguste Miquel* 345

Développements sur une classe d'équations relatives à la représentation géométrique des fonctions elliptiques; par M. *J.-A. Serret* ..... [illegible]

Extrait d'une Lettre de M. *William Thomson* à M. Liouville 364

Théorie des points singuliers dans les courbes planes algébriques; par M. *C. Briot* 368

Note sur la formule de Taylor; par M. *Cornu* [illegible]

Démonstration d'un théorème de M. Chasles; par M. *A. Cayley* 385

Mémoire sur les fonctions doublement périodiques; par *le même* ..... [illegible]

Note sur les courbes elliptiques de la première espèce; par M. *J.-A. Serret* 421

Théorie géométrique des centres multiples; par M. *Philippe Breton* ..... [illegible]

Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de la géométrie élémentaire: « Trouver la relation entre la distance des centres et les rayons de deux cercles dont l'un est circonscrit à un polygone irrégulier et dont l'autre est inscrit à ce même polygone »; par M. *C.-G. J. Jacobi* ..... [illegible]

Remarques sur les transcendantes elliptiques et abéliennes; par M. *Eisenstein* ... 445

Extrait d'une Lettre de M. *William Roberts* à M. Liouville ..... [illegible]

Note sur une intégrale définie; par M. *William Roberts* 453

Sur un Mémoire de M. Serret, relatif à la représentation des fonctions elliptiques, par *J. Liouville* ..... [illegible]

Théorèmes de géométrie; par M. *Michael Roberts* ..... [illegible]

TABLE DES MATIÈRES

PAR

NOMS D'AUTEURS.

A

AMIOT. — Mémoire sur une nouvelle méthode de génération et de discussion des surfaces du deuxième ordre; t. VIII, p. 161.

[illegible]

B

BERTRAND (J.). — Note sur la [illegible] des fractions qui prennent la forme $\frac{\infty}{\infty}$; t. VI, p. 14.

— Règles sur la convergence des séries; t. VII, p. 35.

— Note sur un point du calcul des variations; t. VII, p. 55.

Note sur un passage de la *Mécanique* [illegible] *tique*; t. VII, p. 165.

— Note sur un théorème de mécanique; t. VII, p. 212.

— Démonstration d'un théorème de géométrie; t. VII, p. 215.

— Détermination de l'intégrale définie

$$\int \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

t. VIII, p. [illegible]

Remarques sur la théorie des maxima et minima de fonctions à plusieurs variables; t. VIII, p. [illegible]

— Démonstration d'un théorème de géométrie, t. VIII, p. 209.

— Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales; t. IX, p. 117.

— Mémoire sur la théorie des surfaces; t. IX, p. 133.

BESGE. — Sur le centre de gravité d'un triangle sphérique; t. VII, p. 516.

— Sur une équation [illegible] fractionnaires; t. IX, p. [illegible]

Sur l'équation [illegible] p. [illegible]

BINET (J.). — Remarque sur une courbe qui est [illegible] de l'une de leurs deux espèces de courbures; t. VI, p. 61.

— Recherches sur la théorie des nombres entiers et sur la résolution de l'équation indéterminée [illegible] des solutions entières; t. VI, p. 149.

— Note sur la convergence des suites, t. VI [illegible]

— Note à la suite d'un article de M. Liouville relatif à un Mémoire de N. Fuss; t. VIII [illegible]

BLANCHET. — [illegible] M. Liouville; t. VI, p. 65.

Mémoire sur la détermination de [illegible] t. VII, p. 13.

— Mémoire [illegible] de la délimitation de l'onde; t. VII, p. 23

— Mémoire sur les ondes successives, t. IX [illegible]

BONNET (O.). — Note sur l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx,$$

t. VI, p. 238.
— Note sur la convergence et la divergence des séries; t. VIII, p. 73.
Propriétés géométriques et mécaniques de quelques courbes remarquables; t. IX, p. 97.
— Note sur un théorème de mécanique; t. IX, p. 113.
Note sur une propriété de la lemniscate; t. IX, p. 116.
— Solution de quelques problèmes de mécanique; t. IX, p. 217.
BRASSINE. — Sur quelques propriétés des courbes et des surfaces du second degré; t. VII, p. 120.
— Sur quelques propriétés des centres de gravité; t. VIII, p. 46.
— Note sur la transformation et l'intégration d'une classe d'équations différentielles simultanées à plusieurs variables; t. X, p. 194.
BRAVAIS. — Mémoire sur le mouvement propre du système solaire dans l'espace; t. VIII, p. 435.
BRETON (DE CHAMP). — Note sur la détermination de la surface moyenne d'un rectangle dont les côtés peuvent varier entre des limites données; t. IX, p. 373.
BRETON (PHILIPPE). — Théorie géométrique des centres multiples; t. X, p. 430.
BRIOT. — Thèse sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe; t. VII, p. 70.
— Théorie des points singuliers dans les courbes planes algébriques; t. X, p. 368.

C

CABART. — Note sur l'héliostat; t. IX, p. 175.
CALIGNY (A. DE). — Expériences sur les oscillations de l'eau dans une grande conduite de Paris; t. VI, p. 89.
— Système de fontaines intermittentes et d'appareils à élever l'eau sans pièce mobile, modèle fonctionnant; t. VI, p. 321.
— Système de fontaines intermittentes sous-marines. Théorie, et modèle fonctionnant. Suivi d'une Note de M. *Combes*; t. VIII, p. 23.
CAQUÉ. — Note sur la formule de Taylor; t. X, p. 379.
CATALAN. — Solution d'un problème de combinaisons; t. VI, p. 74.
— Deux problèmes de probabilités; t. VI, p. 75.
— Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple; t. VI, p. 81.
Problème de calcul intégral; t. VI, p. 340. — Autres problèmes; t. VI, p. 419.
— Note sur la sommation de quelques séries; t. VII, p. 1.
— Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum; t. VII, p. 203.
— Note sur une formule de combinaisons; t. VII, p. 511.
— Note sur une formule relative aux intégrales multiples; t. VIII, p. 239.
— Note sur une formule d'Euler; t. IX, p. 161.
CAUCHY. — Note sur la réflexion de la lumière à la surface des métaux; t. VII, p. 338.
CAYLEY. — Mémoire sur les courbes du troisième ordre; t. IX, page 285.
— Nouvelles remarques sur les courbes du troisième ordre; t. X, p. 102.
— Sur quelques intégrales multiples; t. X, p. 158. — Addition à cette Note; t. X, p. 242.
— Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables; t. X, p. 245.
— Démonstration d'un théorème de M. *Chasles*; t. X, p. 383.
— Mémoire sur les fonctions doublement périodiques; t. X, p. 385.
CELLÉRIER. — Note sur la détermination d'une fonction arbitraire; t. VIII, p. 245.
— Note sur une classe particulière d'intégrales définies; t. VIII, p. 255.
CHASLES. — Sur une propriété de la projection stéréographique; t. VII, p. 272.
— Théorèmes sur les surfaces du second degré; t. VIII, p. 215.
— Note à l'occasion du Mémoire de M. *Transon*, sur une méthode géométrique pour les rayons de courbure d'une certaine classe de courbes; t. X, p. 156.
— Construction des rayons de courbure des courbes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan; t. X, p. 204.

COMBES. — Note à la suite d'un Mémoire de M. *de Calagny*; t. VIII, p. 50.
COSTE. — Question de probabilité applicable aux décisions rendues par les jurés; t. VII, p. 189.
— Note sur le nombre des points multiples des courbes algébriques; t. VII, p. 184.

D

DARU. — Sur l'intégration des équations linéaires à coefficients constants; t. VII, p. 266.
DELAUNAY (Ch.). — Thèse sur la distinction des maxima et des minima dans les questions qui dépendent de la méthode des variations; t. VI, p. 209.
— Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante; t. VI, p. 309.
— Note sur la ligne de longueur donnée qui renferme une aire maximum sur une surface: t. VIII, p. 241.
— Mémoire sur la théorie des marées; t. IX, p. 29.
DIRICHLET. *Voyez* Lejeune-Dirichlet.
DUHAMEL. — Mémoire sur un phénomène relatif à la communication des mouvements vibratoires; t. VIII, p. 113.
DUHAYS. — Du jeu de loto; t. VII, p. 192.
— De la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax^2 \cdots b = y^2$, des séries récurrentes qui en résultent, et de l'ordre à suivre dans la solution de l'équation $x^3 + y^3 = z^3$; t. VII, p. 325.

E

EISENSTEIN. — Remarques sur les transcendantes elliptiques et abéliennes; t. X, p. 445.
ELLIS. *Voyez* Robert (L.-E.).

F

FERRIOT. — Note sur le centre de gravité d'un triangle sphérique quelconque, et d'une pyramide sphérique; t. VII, p. 59.
FINCK. — Note relative à l'élimination; t. IX, p. 334.
— Note sur la courbure des surfaces; t. IX, p. 400.
— Équations numériques. Recherche des facteurs commensurables du second degré; t. X, p. 171.

G

GASCHEAU. — Remarques sur la théorie géométrique des axes permanents de rotation; t. VI, p. 241.
— Application du théorème de M. Sturm aux transformées des équations binômes; t. VII, p. 126.
GAUSS. — Démonstration élémentaire d'un théorème de Legendre relatif à la trigonométrie sphérique; t. VI, p. 273.
— Théorèmes généraux sur les forces attractives et répulsives qui agissent en raison inverse du carré des distances; t. VII, p. 273.
GRILLET. — Sur les exponentielles successives d'Euler et les logarithmes des différents ordres des nombres; t. X, p. 233.
GUILHEM (Saint-). — Mémoire sur la poussée que des terres nouvellement remuées exercent contre le parement d'un mur d'appui; t. IX, p. 1.

H

HERMITE. — Sur la théorie des transcendantes à différentielles algébriques; t. IX, p. 353.

J

JACOBI. — De la ligne géodésique sur un ellipsoïde, et des différents usages d'une transformation analytique remarquable; t. VI, p. 267.
— Démonstration élémentaire d'une formule analytique remarquable; suivie de quelques propositions arithmétiques qui s'en déduisent; t. VII, p. 85.
— Sur les nombres premiers complexes que l'on doit considérer dans la théorie des résidus de cinquième, huitième et douzième puissance; t. VIII, p. 268.
— Extrait d'une Lettre à M. *Hermite*; t. VIII, p. 505.
— Mémoire sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps; t. IX, p. 313.
— Sur les fonctions de Laplace, qui résultent du développement de l'expression
$$\left\{a^2-2aa'\left[\begin{matrix}\cos\omega\cos\varphi\\+\sin\omega\sin\varphi\cos(\theta-\theta')\end{matrix}\right]+a'^2\right\}^{-\frac{1}{2}};$$
t. X, p. 229.
— Sur le principe du dernier multiplicateur, et sur son usage comme nouveau principe général de mécanique; t. X, p. 337.
— Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de la géométrie élémentaire : « Trouver la relation entre la distance des centres et les rayons de deux cercles dont l'un est circonscrit à un polygone régulier et dont l'autre est inscrit à ce même polygone »; t. X, p. 435.

L

LAMÉ. — Mémoire sur les surfaces isostatiques dans les corps solides homogènes en équilibre d'élasticité; t. VI, p. 37.
— Mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes; t. VIII, p. 397.
— Note sur la méthode de recherche des surfaces isothermes; t. VIII, p. 515.
LEBESGUE. — Mémoire sur une formule de Vandermonde, et son application à la démonstration d'un théorème de M. Jacobi; t. VI, p. 17.
— Démonstration de quelques théorèmes relatifs aux résidus et aux non résidus quadratiques; t. VII, p. 137.
— Théorèmes nouveaux sur l'équation indéterminée $x^5+y^5=az^5$; t. VIII, p. 49.
— Note sur l'intégration de l'équation différentielle
$$(A+A'x+A''y)(x\,dy-y\,dx)$$
$$-(B+B'x+B''y)\,dy+(C+C'x+C''y)\,dx=0,$$
t. X, p. 316.
LEJEUNE-DIRICHLET. — Recherches sur la théorie des nombres complexes; t. IX, p. 245.
LESLIE. *Voyez* ROBERT (L.-E.).
LE VERRIER. — Recherches sur l'orbite de Mercure et sur ses perturbations. Détermination de la masse de Vénus et du diamètre du Soleil; t. VIII, p. 273.
LIOUVILLE (J). — Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati; t. VI, p. 1.
— Sur l'intégrale $\int_0^{2\pi}\cos i(u-x\sin u)\,du$; t. VI, p. 36.
— Sur une formule de M. Jacobi; t. VI, p. 69.
— Mémoire sur quelques propositions générales de géométrie et sur la théorie de l'élimination dans les équations algébriques; t. VI, p. 345.
— Extrait d'un Mémoire sur un cas particulier du problème des trois corps; t. VII, p. 110.
— Sur l'équation
$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dx}{dy}+F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0;$$
t. VII, p. 134.
— Sur les fractions qui se présentent sous la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$; t. VII, p. 160.
— Sur un problème de géométrie relatif à la théorie des maxima et minima; t. VII, p. 163.
— Sur l'ellipse de plus petite surface qui passe par trois points A, B, C, et sur l'ellipsoïde de plus petit volume qui passe par quatre points A, B, C, D; t. VII, p. 190.
— Démonstration d'un théorème de M. Biot sur les réfractions astronomiques près de l'horizon; t. VII, p. 268.
— Sur l'équation $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}=0$; t. VIII, p. 265.

— Sur la loi de la pesanteur à la surface ellipsoïdale d'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation; t. VIII, p. 360.
Remarques sur un Mémoire de N. Fuss; suivies d'une Note de M. *Binet*; t. VIII, p. 391.
— Rapport fait à l'Académie des Sciences de l'Institut, au nom d'une Commission composée de MM. *Lamé* et *Liouville*, sur un Mémoire de M. Hermite, relatif à la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques; suivi d'une Lettre de M. *Jacobi* à M. *Hermite*; t. VIII, p. 502.
Sur la division du périmètre de la lemniscate, le diviseur étant un nombre entier réel ou complexe quelconque; t. VIII, p. 507.
— Sur un théorème d'Abel; t. VIII, p. 513.
— Développements sur un théorème de géométrie; t. IX, p. 337.
— Sur une propriété des sections coniques; t. IX, p. 350.
— De la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque; t. IX, p. 401.
— Sur le rayon de courbure des courbes géométriques; t. IX, p. 435.
— Sur les deux formes [illegible]; t. X, p. 169.
— Sur diverses questions d'analyse et de physique mathématique; t. X, p. 222.
— Rapport sur le Mémoire de M. Serret, [illegible] représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultra-elliptiques; t. X, p. 290.
— Note ajoutée à ce Rapport; p. X, p. 293.
— Sur une propriété générale d'une classe de fonctions; t. X, p. 427.
— Sur un Mémoire de M. Serret, relatif à la représentation des fonctions elliptiques; t. X, p. 456.
— Communication verbale à l'Académie des Sciences (Théorèmes de géométrie par M. *Michael Roberts*); t. X, p. 466.
LOBATTO. — Note sur une propriété relative aux racines d'une classe particulière d'équations du troisième degré; t. IX, p. 177.
— Sur quelques nouveaux caractères propres à reconnaître l'imaginarité de deux racines d'une équation numérique, situées entre des limites données; t. IX, p. 295.

M

MAC-CULLAGH. — Mémoire sur les lois de la réflexion et de la réfraction cristalline; t. VII, p. 217.
MINDING. — Sur le degré de l'équation finale qui résulte de l'élimination; t. VI, p. 412.
MIQUEL. — Mémoire de géométrie sur les angles curvilignes (première partie); t. IX, p. 20[illegible]. Deuxième partie; t. X, p. 347.
MOLINS. — Sur les trajectoires qui coupent sous un angle donné les tangentes à une courbe à double courbure; t. VIII, p. 145.
— De la détermination, sous forme intégrale, des équations des développées des courbes à double courbure; t. VIII, p. 379.

N

NEUMANN. — Recherche théorique des lois d'après lesquelles la lumière est réfléchie et réfractée à la limite commune de deux milieux complétement transparents; t. VII, p. 36[illegible].

O

OLIVIER (Th.). — Des propriétés osculatrices de deux surfaces en contact par un point; t. VI, p. 297.

P

POINSOT. — Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres; t. X, p. 1.
PUISEUX. — Problème de géométrie; t. VII, p. 65.

— Note sur le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère; t. VII, p. 517.
— Note sur le mouvement d'une chaîne pesante infiniment mince sur la cycloïde; t. VIII, p. 71.
— Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes; t. IX, p. 377.
— Sur les courbes tautochrones; t. IX, p. 469.

R

RAABE. — Note sur la théorie de la convergence et de la divergence des séries; t. VI, p. 85.
ROBERT (L.-E.). — Sur les intégrales aux différences finies; t. IX, p. 422.
ROBERTS (M.). — Note sur deux systèmes généraux de trajectoires orthogonales; t. X, p. 251.
— Quelques théorèmes de géométrie (communication verbale de M. Liouville à l'Académie des Sciences); t. X, p. 466.
ROBERTS (W.). — Sur une représentation géométrique des fonctions elliptiques de première espèce; t. VIII, p. 263.
— Sur une représentation géométrique des trois fonctions elliptiques; t. IX, p. 155.
— Application de la théorie des transcendantes elliptiques à la rectification d'une classe étendue de courbes planes; t. X, p. 177.
— Mémoire sur quelques propriétés géométriques relatives aux fonctions elliptiques; t. X, p. 297.
— Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville; t. X, p. 451.
— Note sur une intégrale définie; t. X, p. 453.
RODRIGUES (O.). — Du développement des fonctions trigonométriques en produits de facteurs binômes; t. VIII, p. 217.
— Note sur l'évaluation des arcs de cercles, en fonction linéaire des sinus ou des tangentes de fractions de ces arcs, décroissant en progression géométrique; t. VIII, p. 225.

S

SARRUS. — Sur la résolution des équations numériques à une ou plusieurs inconnues et de forme quelconque; t. VI, p. 171.
SÉNARMONT. — Note sur la théorie mathématique de la double réfraction; t. VIII, p. 361.
SERRET. — Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce; t. VII, p. 114.
— Note sur quelques formules de calcul intégral; t. VIII, p. 1.
— Note sur les fonctions elliptiques de première espèce; t. VIII, p. 145.
— Sur quelques formules relatives à la théorie des intégrales eulériennes; t. VIII, p. 489.
— Propriétés géométriques relatives à la théorie des fonctions elliptiques; t. VIII, p. 495.
— Sur une propriété mécanique de la lemniscate, découverte par N. Fuss; t. IX, p. 28.
— Note à l'occasion du Mémoire de M. *William Roberts*, sur une représentation géométrique des trois fonctions elliptiques; t. IX, p. 160.
— Mémoire sur l'intégration d'une équation différentielle à l'aide des différentielles à indices quelconques; t. IX, p. 193.
— Note sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}dx$; t. IX, p. 436.
— Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultra-elliptiques; t. X, p. 257. — Addition au Mémoire précédent; t. X, p. 286.
— Développements sur une classe d'équations relatives à la représentation géométrique des fonctions elliptiques; t. X, p. 351.
— Note sur les courbes elliptiques de la première classe; t. X, p. 421.
STEINER. — Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général; t. VI, p. 105.
STURM. — Note à l'occasion de l'article de M. *Delaunay*, sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante; t. VI, p. 315.
— Note à l'occasion de l'article de M. *Gascheau*, sur l'application du théorème de M. Sturm

aux transformées des équations binômes; t. VII, p. 132.
— Note sur un Mémoire de M. *Chasles*; t. VII, p. 345.
— Démonstration d'un théorème d'algèbre de M. *Sylvester*; t. VII, p. 356.

T

TCHEBICHEF. — Note sur une classe d'intégrales définies multiples; t. VIII, p. 235.
TERQUEM (O.). — Notice sur un manuscrit hébreu du Traité d'arithmétique d'Ibn-Esra, conservé à la Bibliothèque royale; t. VI, p. 275.
THOMSON (W.). — Note sur la théorie de l'attraction; t. IX, p. 239.
— Démonstration d'un théorème d'analyse; t. X, p. 137.
— Note sur les lois élémentaires de l'électricité statique; t. X, p. 209.
Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville; t. X, p. 364.
TRANSON. — Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces; t. VI, p. 191.
— Extrait d'une Lettre adressée à M. *Liouville*; t. VI, p. 441.
— Sur la détermination des orbites planétaires; t. IX, p. 369.
Méthode géométrique pour les rayons de courbure d'une certaine classe de courbes; t. X, p. 148.
— Note sur les principes de la mécanique; t. X, p. 320.

V

VENANT (DE SAINT-). — Intégration d'une équation différentielle qui se présente dans la théorie de la flexion des verges élastiques; t. IX, p. 191.
— Note sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires; t. IX, p. 270. — Addition à la Note sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires. — Démonstration géométrique et directe des relations binômes; t. IX, p. 310.
— Note sur les flexions considérables des verges élastiques; t. IX, p. 275.
VIEILLE. — Note relative à l'instabilité de l'équilibre d'un système de points matériels; t. X, p. 329.

FIN DU DIXIÈME VOLUME.

Fig. 1

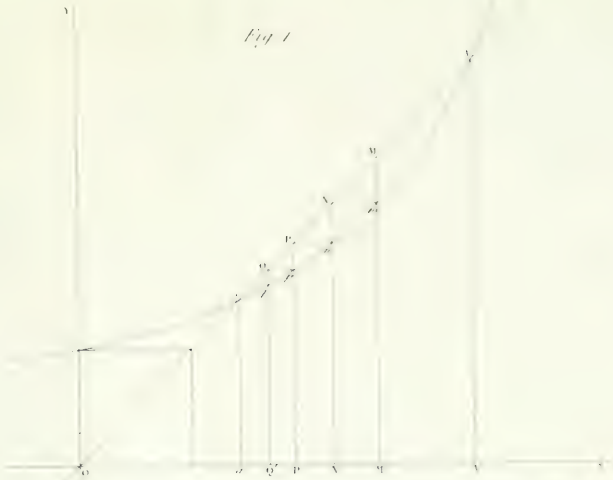
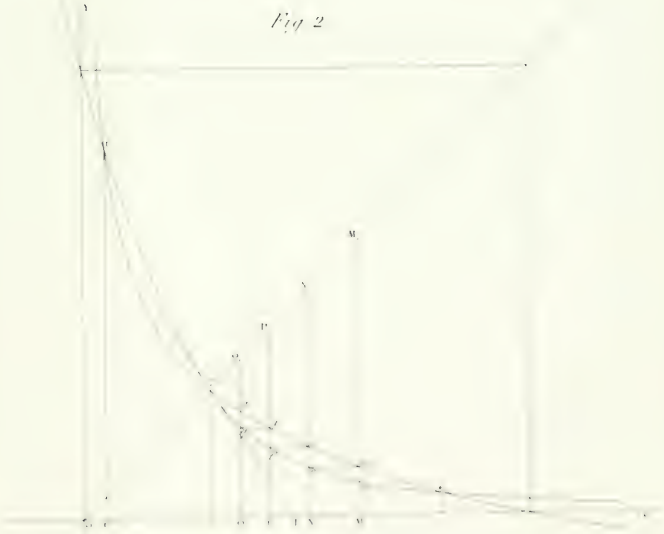


Fig. 2



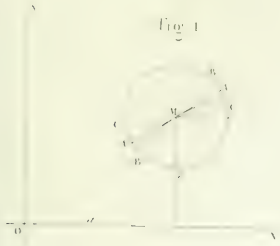


Fig. 1

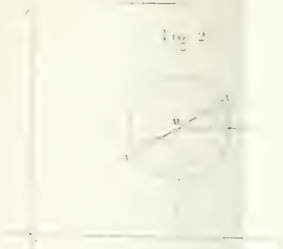


Fig. 2

Fig. 3

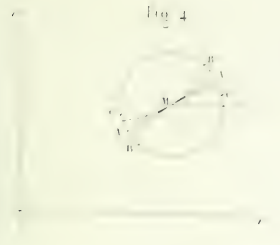
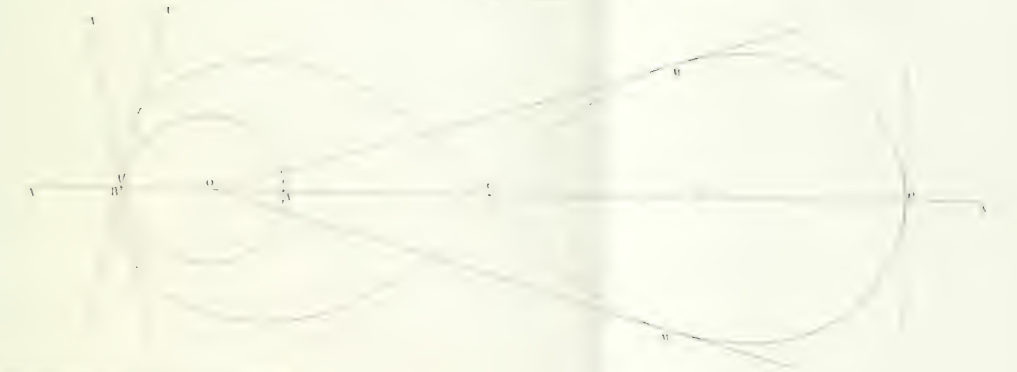


Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6



QA
1
J684
t.10
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY